

Сеад Мандак¹³

Државни универзитет у Новом Пазару,

УСЛОВНИ ЕКСТРЕМУМИ

Апстракт: Појам условног екстремума је у непосредној вези са појмом локалног екстремума реалних функција више независно променљивих. Поступак проналажења условних екстремума је у доброј мери аналоган поступку проналажења локалних екстремума. Због тога су у првих неколико страница овог рада укратко, без доказа, приказани сви важнији резултати који нам омогућавају испитивање локалних екстремума реалних функција више независно променљивих.

Кључне речи: локални екстремум, испитивање екстремума, реалне функције, независно променљиве, условни екстремуми.

1. ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМИ

Приликом цртања графика реалних функција једне независне променљиве од посебног значаја нам је било проналажење тачака у којима функција постиже локални минимум, односно локални максимум. Те вредности се једним именом називају локалним екстремумима. Локални екстремуми реалних функција више независно променљивих уводе се аналогно као и код функција једне независно променљиве.

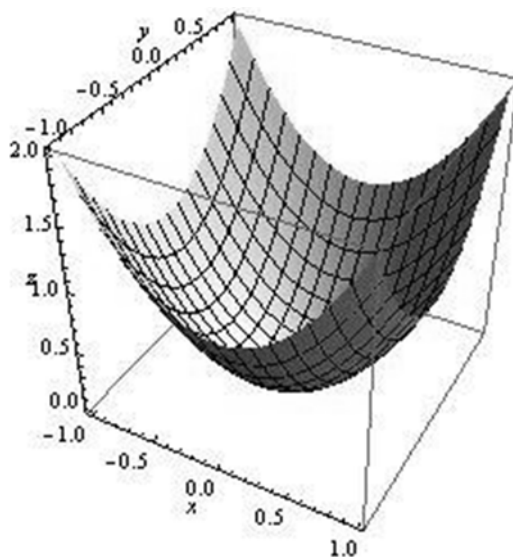
Дефиниција 1. Нека је функција $u = f(x_1, \dots, x_n) = f(M)$ дефинисана у некој околини U тачке M_0 . Ако је за свако $M \in U \setminus \{M_0\}$ испуњено

$$f(M) < f(M_0) \quad (\text{односно } f(M) > f(M_0))$$

тада кажемо да функција $u = f(M)$ има у тачки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ **локални максимум** (односно **локални минимум**).

¹³ seadmandak@gmail.com

На слици 1. дат је пример реалне функције две независно променљиве која постиже локални минимум у тачки $(0; 0)$.



Слика 1.

Приметимо да су локални екстремуми, према овој дефиницији, увек постигнути у унутрашњим тачкама домена функције. О такозваним рубним екстремумима говорићемо нешто касније.

Као и код функција једне променљиве, за диференцијабилне функције постоји једноставан услов за постојање локалног екстремума.

Став 1. Нека функција $u = f(M)$ има у тачки M_0 све парцијалне изводе првог реда и нека у тој тачки има локални екстремум. Тада је

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = \dots = \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) = 0$$

Специјално, ако је u диференцијабилна у M_0 , онда је $du_{M_0} = 0$.

Унутрашње тачке домена функције u у којима су сви парцијални изводи једнаки нули називају се стационарним тачкама. По правилу, функција нема у свим својим стационарним тачкама локални екстремум. Због тога нам је потребно пронаћи довољне услове под којима функција у својој стационарној тачки заиста има локални екстремум. За формулисање таквих услова биће нам потребни неки појмови из линеарне алгебре које ћемо сада навести.

2. КВАДРАТНЕ ФОРМЕ

Реална функција n променљивих облика

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j \quad (1)$$

где су a_{ij} дати бројеви, зове се квадратна форма променљивих $h_1, \dots, h_n$.

За квадратну форму кажемо да је:

1. позитивно (негативно) полудефинитна ако се за све $h = (h_1, \dots, h_n) \in R^n$ важи

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) \geq 0 \quad \text{односно} \quad \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) \leq 0$$

2. позитивно (негативно) дефинитна ако за све $h = (h_1, \dots, h_n) \in R^n, h \neq 0$ важи

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) > 0 \quad \text{односно} \quad \Phi(h_1, \dots, h_n) < 0$$

3. променљивог знака ако постоје $h = (h_1, \dots, h_n), k = (k_1, \dots, k_n) \in R^n$, такви да је

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) > 0, \quad \Phi(k_1, \dots, k_n) < 0$$

Пример 1. Квадратна форма

$$\begin{aligned} \Phi_1(h_1, h_2, h_3) &= 2h_1^2 + 5h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3 \\ &= (h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 - 2h_2)^2 + h_3^2 \end{aligned}$$

је позитивно дефинитна јер је $\Phi_1(h_1, h_2, h_3) > 0$ за $(h_1, h_2, h_3) \neq (0; 0; 0)$.
Квадратна форма

$$\Phi_2(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 2h_2h_3 = (h_1 + h_2 - h_3)^2$$

је позитивно полудефинитна, али не и дефинитна, јер је $\Phi_2(h_1, h_2, h_3) = 0$ за све h_1, h_2, h_3 за које важи $h_3 = h_1 + h_2$.

Симетрична матрица

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

у којој се налазе коефицијени квадратне форме (1) такви да важи $a_{ij} = a_{ji}$ за све i, j зове се матрица квадратне форме. Детерминанте

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A(\Phi)$$

зову се **главни минори** матрице A .

За испитивање дефинитности квадратне форме користи се **Силвестеров¹⁴ критеријум**.

Став 2. (Силвестеров критеријум).

1. Квадратна форма (1) са симетричном матрицом A је позитивно дефинитна ако и само ако су сви главни минори матрице A позитивни.
2. Квадратна форма (1) са симетричном матрицом A је негативно дефинитна ако и само ако је

$$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0, \dots$$

тј. ако главни минори наизменично мењају знак, с тим да је $D_1 < 0$.

3. ДОВОЉНИ УСЛОВИ ЛОКАЛНОГ ЕКСТРЕМУМА

Сада ћемо формулисати довољне услове који нам дају одговор на питање када функција има локални екстремум у својој стационарној тачки.

Теорема 1. Нека је $u = f(M)$ два пута непрекидно диференцијабилна функција у некој околини U тачке $M_0(x^0_1, \dots, x^0_n)$, при чему је M_0 стационарна тачка функције $u = f(M)$. Тада:

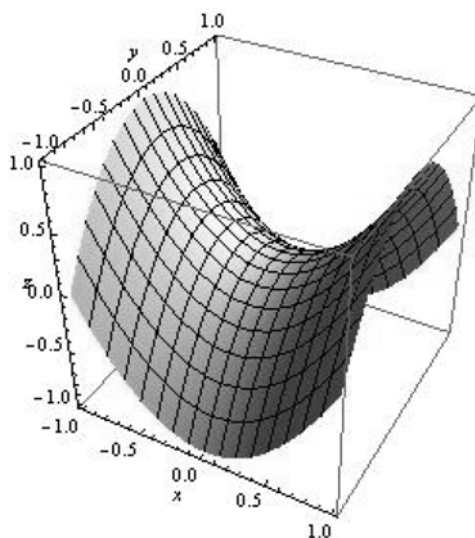
1. Ако је квадратна форма $d^2u_{M_0}$ позитивно дефинитна, онда функција $u = f(M)$ има локални минимум у тачки M_0 ;
2. Ако је квадратна форма $d^2u_{M_0}$ негативно дефинитна, онда функција $u = f(M)$ има локални максимум у тачки M_0 ;
3. Ако је квадратна форма $d^2u_{M_0}$ променљивог знака, онда функција $u = f(M)$ у тачки M_0 нема локални екстремум.

¹⁴ J. J. Sylvester (1814-1897), енглески математичар

Пример 2. Испитајмо егзистенцију локалних екстремума функције $z=x^2-y^2$. Лако се уверавамо да је $M(0, 0)$ једина стационарна тачка функције z . Њен други диференцијал гласи

$$d^2 z_M(dx, dy) = 2dx^2 - 2dy^2$$

Ако ставимо да је $dy = 0$ и $dx \neq 0$ добијамо $d^2 z_M = 2dx^2 > 0$, а ако ставимо да је $dx = 0$ и $dy \neq 0$ добијамо $d^2 z_M = 2dy^2 < 0$, па закључујемо да је квадратна форма $d^2 z_M$ знакопроменљива, тј. да функција $z = x^2 - y^2$ нема локални екстремум у стационарној тачки $M(0, 0)$. За овакве тачке кажемо да су **седласте** (слика 2).



Слика 2. $z = x^2 - y^2$ (хиперболички полароид)

Пример 3. Свака од функција $z_1 = x^3 + y^3$ и $z_2 = x^4 + y^4$ има стационарну тачку $M(0, 0)$ и други диференцијал у тој тачки који је идентички једнак нули - дакле и позитивно и негативно полудефинитан, али не и дефинитан. У таквим ситуацијама знак другог диференцијала нам не може дати одговор на постављени проблем, па решење морамо тражити другим путем.

Тотални прираштај z_1 функције z_1 у тачки $M(0, 0)$ дат је са

$$\Delta z_1(0, 0) = z_1(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - z_1(0, 0) = \Delta x^3 + \Delta y^3$$

Ако узмемо да је $\Delta y = 0$, добијамо $\Delta z_1(0, 0) = \Delta x^3$, па кад $\Delta x \rightarrow 0$, за $\Delta x > 0$ добијамо $\Delta z_1(0, 0) > 0$, а за $\Delta x < 0$, добијамо $\Delta z_1(0, 0) < 0$. Дакле, тотални прираштај функције z_1 мења знак у свакој околини тачке $M(0,0)$, па закључујемо да је та тачка седласта.

За тотални прираштај функције z_2 у тачки $M(0, 0)$ важи

$$\Delta z_2(0, 0) = z_2(\Delta x, \Delta y) - z_2(0, 0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 > 0$$

за свако $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$, па функција z_2 постиже у тој тачки локални минимум и он износи $z_2(0, 0) = 0$.

Поновимо на крају да се све изложено односи само на тзв. унутрашње локалне екстремуме функција више променљивих. Приликом одређивања **апсолутних екстремума** таквих функција неопходно је заједно са унутрашњим стационарним тачкама испитивати и тачке границе домена. За такво испитивање је често корисна техника одређивања тзв. условног екстремума о којој ћемо говорити у следећој глави. С друге стране, ако се траже само апсолутни екстремуми неке функције на ограниченом и затвореном (дакле компактном) скупу, применом Вајерштрасове теореме може се потпуно избећи испитивање карактера стационарних тачака.

4. УСЛОВНИ ЕКСТРЕМУМИ

У претходним одељцима упознали смо се са израчунавањем екстремних вредности реалних функција више променљивих. Код функција висе променљивих, међутим, често се срећемо и са једном новом ситуацијом - да се одреде екстремуми неке функције $u = f(M)$, под условима које тачка M , односно њене координате, морају да задовоље. Такви екстремуми зову се **условни екстремуми**. Илуструјмо то на једном примеру.

Пример 5. Посматрајмо функцију $z = x^2 + y^2$ (елиптички параболоид). Одредимо најмању вредност те функције под условом да су променљиве x и y везане релацијом $x + y = 2$. Из дате везе следи $y = 2 - x$, па је у одговарајућим тачкама

$$z = x^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

Како је $z'_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$, $z''_x = 4 > 0$, закључујемо да функција z у тачки $(1, 1)$ има локални минимум $z_{min} = 2$. Приметимо да сама функција z у свакој околини тачке $(1, 1)$ има и мањих вредности од 2. Иначе, њена најмања вредност на R^2 је 0.

Међутим, проблем условног екстремума може се поставити много општије. Размотримо питање екстремума функције

$$u = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$

са $n + m$ променљивих ако су испуњени следећи услови

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Дефиниција 2. Функција $u = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ има у тачки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$ која задовољава једначине (2) условни локални максимум (минимум) ако и само ако је неједнакост

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0))$$

испуњена у некој околини тачке M_0 за све тачке $M \neq M_0$, које задовољавају једначине (2).

Даље семо претпоставити да функција f као и функције $F_1, \dots, F_m$ имају у некој околини разматране тачке M_0 непрекидне парцијалне изводе по свим аргументима. Нека је, такође, у тачки M_0 различита од нуле бар једна детерминанта m -тог реда састављена од елемената матрице парцијалних извода.¹⁵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

на пример, детерминанта

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Тада, из теореме о имплицитној функцији следи да се релације (2) у некој околини тачке M_0 могу на јединствен начин изразити преко система непрекидно диференцијабилних функција

¹⁵ У овом случају каже се да матрица (3) има у тачки M_0 ранг m

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_{n+2} &= \varphi_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_{n+m} &= \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

које су дефинисане у некој околини тачке $M_0(x_1, \dots, x_n)$. Ако је могуће решити систем (2) по $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ и експлицитно добити функције (5), тада се питање условног екстремума функције $u = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ у тачки M_0 своди на проналажење екстремума сложене функције од n независно променљивих

$$u = f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$$

Описани метод одређивања условног екстремума има два крупна недостатка: прво, без обзира на принципијелну могућност решавања система (2) коју гарантује теорема о имплицитној функцији, та решења се по правилу не могу експлицитно добити; друго, оваквим поступком се у одређеном смислу нарушава равноправност међу променљивим $x_1, \dots, x_{n+m}$ (неке остају независно променљиве, а друге се преко њих изражавају), што у неким случајевима доводи до компликовања даљих извођења. Оба ова недостатка отклањају се применом **Лагранжове методе неодређених множитеља** коју ћемо описати у наставку. Прво ћемо дати потребне, а затим и довољне услове за егзистенцију условног екстремума Лагранжовом методом.

Теорема 2. Нека су функције $f, F_1, \dots, F_m$ непрекидно диференцијабилне у некој околини тачке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$ и нека је $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})} \neq 0$ у тачки M_0 . Ако функција f у тачки M_0 има условни локални екстремум, онда постоје реални бројеви $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ такви да је M_0 стационарна тачка Лагранжове функције

$$F = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$$

Доказ. Нека је M_0 тачка у којој функција f има локални екстремум. Одредимо реалне бројеве $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ тако да су парцијални изводи Лагранжове функције F у тачки M_0 по променљивим $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ једнаки нули. Диференцирањем функције F добијамо систем једначина:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}}(M_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(M_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+2}}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}}(M_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+2}}(M_0) &= 0 \\ \vdots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+m}}(M_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}(M_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ово је систем од m једначина непознатих $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Детерминанта овог система је Јакобијан $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})} \neq 0$, па на основу Крамеровог правила он има јединствено решење по $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Сада је потребно доказати да су и парцијални изводи Лагранжове функције F у тачки M_0 по променљивим $x_1, \dots, x_n$ једнак нули.

Према теорему о имплицитној функцији, постоји јединствен систем непрекидно диференцијабилних функција (5) у некој околини тачке $\widetilde{M}_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Користећи правило диференцирања сложене функције из једнакости (2) добијамо да у тој околини важи

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_{n+2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_{n+m}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

за све $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$. Даље, функција

$$\begin{aligned} u &= f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \\ &= f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

има локални екстремум у тачки $\widetilde{M}_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ па су њени парцијални изводи у тој тачки једнаки нули, тј.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

за све $j = 1, \dots, n$.

Користећи једнакости (7) и (8) добијамо да је за $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(M_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(M_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(M_0) \\ &= - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \lambda_1 \left(- \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+k}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) + \cdots + \lambda_m \left(- \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+k}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+k}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+k}} \right) \frac{\varphi_k}{\partial x_j} \end{aligned}$$

при чему су сви парцијални изводи рачунати у одговарајућим тачкама. На крају, на основу система (6) закључујемо да је

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(M_0) = - \sum_{k=1}^m 0 \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n)$$

чиме је теорема доказана.

На основу претходне теореме видимо да приликом практичног одређивања потенцијалних тачака условног екстремума прво треба наћи стационарне тачке Лагранжове функције

$$F = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$$

тј. решења система од $n+2m$ једначина са исто толико непознатих

$x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n+m \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} &= F_j = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

За проверу да ли су решења тог система заиста тачке условног екстремума функције f користи се следећа теорема.

Теорема 3. Нека су уз ознаке и претпоставке теореме 2 испуњени и следећи услови:

(i) Функције $f, F_1, \dots, F_m$ су два пута непрекидно диференцијабилне у некој околини тачке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$;

(ii) Тачка M_0 је стационарна тачка Лагранжове функције $F = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$ за неки избор параметара $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Нека је, даље

$$\Phi_{M_0}(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j \quad (9)$$

квадратна форма променљивих $dx_1, \dots, dx_n$, где су $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ одредећи системом једначина

$$dF_{i_{M_0}}(dx_1, \dots, dx_{n+m}) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_{n+m}}(M_0) dx_{n+m} = 0 \quad (10)$$

за $i = 1, \dots, m$. Тада:

1. Ако је квадратна форма Φ_{M_0} позитивно дефинитна, онда функција f има условни локални минимум у тачки M_0 ;
2. Ако је квадратна форма Φ_{M_0} негативно дефинитна, онда функција f има условни локални максимум у тачки M_0 ;
3. Ако је квадратна форма Φ_{M_0} променљивог знака, онда функција f у тачки M_0 нема условни локални екстремум.

Доказ. Као што смо већ напоменули на почетку одељка, теорема о имплицитној функцији нам гарантује постојање два пута непрекидно диференцијабилних функција (5) у некој околини U тачке $\bar{M}_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Диференцијале $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ ових функција добијамо решавањем система (9). Због тога ћемо уместо функција $f, F, F_1, \dots, F_m$ испитивати функције

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)) \\ \tilde{F}(x_1, \dots, x_n) &= F(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)) \\ \tilde{F}_i(x_1, \dots, x_n) &= F_i(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n))\end{aligned}$$

за $i = 1, \dots, m$, које су два пута непрекидно диференцијабилне у околини U тачке $\bar{M}_0$.

Јасно је да се испитивање условног екстремума функције f своди на испитивање локалног екстремума функције $\tilde{f}$. Из инваријантности форме првог диференцијала сложене функције следи

$$d\tilde{f}_{\bar{M}_0}(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) dx_i$$

Ако једначине (10) редом помножимо са λ_i и сумирамо по i добијамо

$$\sum_{i=1}^{n+m} (\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(M_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(M_0)) dx_i = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m)(M_0) dx_i = 0$$

па је

$$d\tilde{f}_{\bar{M}_0}(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m)(M_0) dx_i = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(M_0) dx_i = 0$$

тј. $\bar{M}_0$ је стационарна тачка функције $\tilde{f}$. Испитајмо сада чему је једнак други диференцијал те функције:

$$d^2 \tilde{f}_{\bar{M}_0}(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) d^2 x_i \quad (11)$$

Даље је

$$d^2 \tilde{F}_{i_{\tilde{M}_0}}(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(M_0) d^2 x_i = 0 \quad (12)$$

за $i = 1, \dots, m$. Ако сваку од једначина (12) помножимо са λ_i и тако добијене једначине додамо у (11) добијамо

$$\begin{aligned} d^2 \tilde{f}_{\tilde{M}_0}(dx_1, \dots, dx_n) &= \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m)(M_0) dx_i dx_j \\ &\quad + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m)(M_0) d^2 x_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(M_0) d^2 x_i \\ &= \Phi_{M_0}(dx_1, \dots, dx_n) \end{aligned}$$

тј. Други диференцијал функције $d^2 \tilde{f}_{\tilde{M}_0}$ је једнак квадратној форми (9) где су $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ одређени системом једначина (10) па доказ теореме следи из теореме 1.

Пример 6. Решимо сада проблем из примера 5 помоћи Лагранжове методе неодређених множитеља. У овом случају имамо један $F_1(x, y) = x + y - 2 = 0$. Одговарајућа Лагранжова функција гласи

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$$

Стационарне тачке функције F добијамо решавањем следећег система једначина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \\ F_1 &= x + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Јединствено решење овог система је $x = 1, y = 1, \lambda = -2$, па је $M_0(1, 1)$ једина стационарна тачка функције F која се добија за $\lambda = -1$. Даље је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$$

док су сви остали парцијални изводи другог реда функције F једнаки нули. Одговарајућа квадратна форма (0) добија облик

$$\Phi_{M_0}(dx) = 2dx^2 + 2dy^2$$

где dy изражавамо преко dx из релације

$$dF_{1_{M_0}} = dx + dy = 0 \implies dy = -dx$$

Коначно је

$$\Phi_{M_0}(dx) = 2dx^2 + 2(-dx)^2 = 4dx^2 > 0$$

за све вредности $dx \neq 0$, па закључујемо даје форма Φ_{M_0} позитивно дефинитна, тј. да функција z има у тачки $M_0(1, 1)$ условни локални минимум при услову $x + y - 2 = 0$, и он износи $z_{\min}(1, 1) = 2$.

Литература

- Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg: *Matematička analiza II*, Krug, Beograd 2011.
- Radoslav Dimitrijević: *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Niš 2010.
- Milos Miličić: *Matematička analiza*, Akademska misao, Beograd 2012.
- Stojan Radenović: *Matematička analiza II*, Metodiska zbirka zadataka, Studentski trg, Beograd 2002.
- Nenad Cakić, Vladimir Bečejac: *Matematika 3*, Zbirka rešenih zadataka, Akademska misao, Beograd 2013.
- I. I. Ljaško, A. K. Boljarčuk, J. G. Gaj, G. P. Golovac: *Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize*, Drugi deo, Naša knjiga, Beograd 2007.
- Gradimir Milovanović, Radoslav Đorđević: *Linearna algebra*, Niš 2004.

CONDITIONAL EXTREMES

Summary: *The concept of conditional extremes is directly related to the concept of local extremes of real functions of several independent variables. The process of finding a conditional extremum is largely analogous to the process of finding local extremes. Therefore, in the first few pages of this work briefly, without evidence, shows all the significant results that enable us to examine local extremes of real functions of several independent variables.*

Key words: *local ekstremum, trial extremes, real functions, independent variables, conditional extremes*