Зборник радова Учитељског факултета, 11, 2017, стр. 43-48
512
COBISS.SR-ID 247604236

Алија Мандак[6]
Универзитет у Приштини – Косовској Митровици
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавићу

РЕШИВОСТ ГРУПА И АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

Абстракт: *Дефинише се појам* ***решиве групе*** *као генерализација појма Абелове групе. Доказује се теорема која даје критеријум за решивост групе. Главни резултат рада је да група* S_n *за* $n \geq 5$ *није решива. Овај резултат се користи у теорији Galois-а за доказивање решивости опште алгебарске једначине n-тог степена над пољем комплексних*

Кључне речи: *групе, Абелова група, решивост, алгебарска једначина.*

УВОД

Назив „*решив група*" потиче од везе између ових група и решивости алгебарске једначине $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ над пољем комплексних бројева.Наиме, ова једначина се може решити помоћу радикала ако и само ако је њена група Galois-а решива.

1.1. Дефиниција. Ако је G група, $x, y \in$ G, онда се елемент
$x^{-1}y^{-1}xy \in$ G
комутатор елемента x,и y и означава са $[x, y]$.

1.2. Дефиниција. Подгрупа од G генерисана свим комутаторима
$[x, y]$, $x, y \in$ G
се назива **комутатор** или **извод** групе и означава са $[G, G]$ = G.

1.3. Теорема. Комутатор G'групе G је нормална подгрупа од G
Kako је извод G'групе G подгрупа од G то се природно може дефинисати и извод од G' – други извод од G. Индуктивно се дефинишу и изводи виших редова. Дакле за свако n∈Nдефинише се

$$G^0 = G,\ G^{(1)} = G' = [G, G], \cdots\ G^{(n)} = (G^{(n-1)}).$$

[6] alija.mandak@pr.ac.rs

Из теореме 1.3 следи да је $G^{(n)}$нормална подгрупа од G.

1.4. Теорема. Нека је H нормална подгрупа групе G. Количник група$G/_H$ је Abelova ako i samo ako je $G' \leq H$. G' је јединствена најмања подгрупа од G таква да је$G/_{G'}$Абелова група.

РЕШИВЕ ГРУПЕ

1.5. Дефиниција. Група G је **решива** ако има субнормалан низ подгрупа такав да су сви чланови одговарајућег факторног низа Абелове групе (такав субнормалан низ се назива **Абелов)**.

Очигледно да је свака Абелова група решива, па се зато појам решиве групе може схватити као генерализација појма Абелове групе.

Следећа теорема даје критеријум за решивост групе.

1.6. Теорема. Група G је **решива** ако и само ако је $G^{(n)}=\{1\}$за неки природан број n.

Доказ.Нека је $G^{(n)} = \{1\}$. Тада изводни низ

$\{1\} = G^{(n)} \trianglerighteq G^{(n-1)} \trianglerighteq \cdots\ G^{(1)} \trianglerighteq G^{0} = G$

је субнормалан и по Теореми 1.4. имамо да је $G^{(i-1)}/G^{(i)}$Абелова група за сваки i = 1, 2, . . . n. Дакле, изводни низ групе G је Абелов и G је решива.

Нека је група G решива и нека је

$1 = G_k \trianglerighteq G_{k-1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_0 = G$

Абелов низ групе G. Докажимо да је $G_i \lesssim G^{(i)}$за све i = 1, 2, . . . k (i = 0) ово је тривијално). Предпоставимо да је $G^{(i-1)} \leq G_{i-1}$. Како је по условуG_{i-1}/G_i Абелова група, то из Теореме 1.4. следи

$G_i \lesssim (G_{i-1})' \lesssim (G^{(i-1)})' = G^{(i)}$.

Сада из $1 = G_K \lesssim G^{(k)}$следи $G^{(k)} = 1$.

1.7. Дефиниција. Група G назива се проста ако је $G \neq \{1\}$и ако нема нетривијалне нормалне подгрупе

Следећа Теорема описује једну веома значајну класу неабелових простих група. Најпре доказујемо наредну Лему.

1.8. Лема. Група A_5је проста.

Произвољна пермутација $\alpha \in A_5$, $\alpha \neq (1)$, је облика $\alpha = (abcde)$или $\alpha = (abc)$ или $\alpha = (ab)(cd)$, где је $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Непосредним рачунањем лако се проверава да је

$$(ab)(cd) = (acb)(acd); (abcd) = (ade)(abc).$$

Дакле, A_5је генерисана цикличним пермутацијама реда3. Нека је $\alpha \in A_5$таква да је $\alpha^3 = (1)$ и нека је $\tau \in A_5$. Ако је $\alpha = (abc)$, $\tau = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \end{pmatrix}$, $\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\} = \{a, b, c, d, e\}$онда је $\alpha^\tau = \tau^{-1}\alpha\tau = (a_1 b_1 c)$ (што се лако проверава непосредним рачунањем), што значи да сви елементи из A_5реда 3 припадају истој класи конјугованих елемената.Нека је K нетривијална нормална подгрупа од A_5. Доказаћемо да K садржи бар једну пермутацију реда три што ће значити да K садржи и све пермутације редатри, тј. све генераторе групе; одатле ће следити $K = A_5$.

Нека $\alpha \in K$, $\alpha \neq (1)$. Ако $\alpha = (abc)$ тврђење је тачно. Ако је $\alpha = (ab)(cd)$, онда за $\beta = (ab)(de) \in A_5$имамо $\alpha\alpha^\beta \in K$ и $\alpha\alpha^\beta = (ced)$.Ако је $\alpha = (abcde)$ онда је $\alpha\alpha^\beta$ K,јер је$K \trianglelefteq A_5$, и $\alpha\alpha^\beta = (abc)$.

1.9. Теорема. За сваки природни број $n \lneqq 5$ алтернативна група A_5је проста.

Доказ.Теорему доказујемо индукцијом по n. За $n = 5$ тврђење је тачно према претходној Леми. Нека је $n > 5$ и нека је група A_{n-1}проста. Посматрамо природно деловање групе A_nна скуп$\{1,2, \dots n\}$. Нека је за сваки$i \leq n$, $H_i = stab_{A_n}(i)$. Сада је $H_i \leq A_n$и очигледно је $H_n \cong A_{n-1}$. *Ако је* $\sigma = (ijk) \in A_n$, где је $k \neq i$, $k \neq j$ $(i, j = 1, 2, \dots n)$ *онда за* $\alpha \in H_j$

$$\alpha^\sigma (i) = \sigma^{-1}\alpha\sigma(i) = i$$

па је $\alpha^\sigma \in H_i$. Отуда $H_i = H_j^\sigma$, што значи да подгрупе$H_1, H_2, \dots, H_n$ образују једну класу конјугованих подгрупа од A_n. Сада је

$$H_i \cong H_n \cong A_{n-1}, \ i = 1, 2, \dots, n,$$

Те по индуктивној претпоставци за сваки $i \le n$ група H_i проста.

Претпоставимо да A_nније проста и нека је К њена нетривијална нормална подгрупа. За сваки $i \le n$ је $H_i \cap K \trianglelefteq H_i$и како је H_iпроста група, то је $H_i \cap K = \{(1)\}$или$H_i \cap K = H_i$. Показујемо да друга могућност мора отпасти. Ако је за неки $j \le n$, $H_j \cap K = H_j$, онда је $H_j \le K$ и како је $H_i = H_j^{\sigma}$и $K \trianglelefteq G$ имамо $H_i \le K^{\sigma} = K$ за сваки $i \le n$. Дакле, К садржи све подгрупе H_i, $i \le n$. За произвољан $\alpha \in A_n$је $\alpha(1) = 1$ или $\alpha(1) = j$ за неки $j \ne 1$. У првом случају је $\alpha \in H_1 \le K$, односно $K = A_n$ што је немогуће. Ako je $\alpha(1) = j$ onda postoji $i \ne j$ tako da je $\alpha = (j1i)^{-1}(j1i)\alpha$. Из $((j1i)\alpha)(1) = 1$ следи $(j1i)\alpha \in H_1 \le K$. Како је $|X|> 3$, то постоји $m \in X$ тако да је $(j1i)^{-1} = (i1j) \in H_m \le K$ и тако $\alpha \in K$, тј. $K = A_n$. Тако и у овом случају имамо контрадикцију са избором подгрупе К. Дакле, за све $i \le n$ је

$$H_i \cap K = \{(1)\}.$$

Нека $\alpha \in K$, $\alpha \ne 1$. За сваки $i \le 1$ важи $\alpha \notin H_i$, што значи да α нема фиксних елемената.*Нека* $\alpha \in X$, $\alpha(a) = b \ne 1$. Како је$|X|> 3$ постоји $c \in X \setminus\{a, b\}$такав да је $\alpha^{-1}(a) \ne c$. Нека је $\alpha(c) = d$. Пошто αне фиксира c имамо да је d различит од a, b, и c. Због $|X| \geqq 6$ можемо изабрати различите елементе eиf, оба различита одa, b, c, d. Пермутација

$$\tau = (ab)(cfed)$$

је парна и за њу је задовољено

$$\alpha^{\tau}(b) = a, \quad \alpha^{\tau}(d) = e.$$

Како је $K \trianglelefteq A_n$, $\alpha \in K$, имамо:

$$\alpha^{\tau} \in K; \ \alpha^{\tau}\alpha \in K; \ (\alpha^{\tau})(a) = a, \alpha^{\tau}(c) = c.$$

Дакле, $\alpha^{\tau}\alpha \in H_i \cap K$ и $\alpha^{\tau}\alpha \ne (1)$ што противречи доказаном $H_i \cap K = \{(1)\}$за сваки $i = 1, 2, \ldots, n$. Према томе, A_nје проста група.

Резултат Теореме 1.9 користи се у доказу следеће Теореме која игра важну улогу у теорији Galois-a при доказивању које су алгебарске једначине n-тог степена над пољим комплексних бројева решиве помоћу радикала.За једначину $a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ каже се да је решиве помоћу радикала ако се корени те једначине могу изразити преко коефицијената те једначине формулама које се добијају примењујући коначан број пута рационалне операције и кореновање.

1.10. Теорема. Симетрична група S_nје решива за n = 2, 3, 4 и није решива за

n ≷ 5.

Доказ. Лако седоказује да је $(S_n)' = A_n$.

S_2 је решива јер је комутативна.

За групу S_3 је
$(S_3)' = A_3 = \{(1), (123), (132)\}$, $(A_3)' = E$

И према томе је $(S_3)^{(2)} = E$, тј. S_3 је решива.

За S_4 је
$(S_4)' = A_4$, $(A_4)' = M = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $M' = E$,
тј. $(S_4)^{(3)} = E$, те је S_4такође решива група.

За n≷5 $(S_n)' = A_n$. Zа n≷5 група A_n није Абелова и проста је. Како је $(A_n)' \trianglelefteq A_n$, то мора бити $(A_n)' = A_n$и зато S_nза n ≷ 5 није решива група.

ЗАКЉУЧАК

Млади Galois је доказао да је алгебарска једначина f(x)=0 над пољем комплексних бројева решива помоћу радикала ако и само ако је њена група Galois-а решиа. Из Теореме 1.7 следи да је једначина f(x)=0 степена n≤4 надпољем комплексних бројева решива помоћу радикала. У томе је важност ове теореме. Абел је доказао да општа алгебарска једначина f(x)=0 над пољем комплексних бројева степена n≷5 није решива помоћу радикала.

ЛИТЕРАТУРА

Artin, E. (1957): *Geometric algebra,* Interscience Publishers, New York.

Чупона, Г. Трпеновски, Б.(!973): *предавања по алгебра II*, Универзитет во Скопје, Скопје.

Kočinac, Lj. Mandak, A. (1996): *Algebra II,* Univerzitet u Prištini, Priština.

Kočinac, Lj. (1991): *Linearna algebra i analitička geometrija,* Univerzitet u Nišu, Niš.

Kurepa, Đ. (1971): *Viša algebra II,* Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

Perić, V. *Algebra II,* Sarajevo.

Stojaković, Z. Paunić, Đ. (1984): *Zbirka zadataka iz algebre,* Beograd.

Rose, J. S. (1978): *A course on group theory,* Cambridge-London- New York-Melbourne.

Stewart, I. (1975):*Galois theory,* Chapman and Hall, London.

SOLUTION OF GROUPS AND ALGEBRAIC EQUATIONS

Abstract. *The term of* ***manageable groups*** *is defined as a generalization of the concept of Abelian group. The theorem which gives criteria for solution of group is proven. The main result of the work is that the group Snza n 5 is not solvable. This result is used in Galois theory as a proof for solution of general algebraic equation of n degree over the field of complex numbers.*

Keywords*: group, Abelian group, solution, algebraic equations.*