Проф. др Алија Мандак
Учитељски факултет, Лепосавић
Златка Павличић
T.Š. ‘‘Никола Тесла’’, Лепосавић

ПИТАГОРИНИ БРОЈЕВИ

Апстракат: *Настаник Питагориних бројева, тј. Целобројних реформи једначине* $x^2 + y^2 = z^2$ *неодвојив је од историјата Питагорине теореме. Због великог значаја и примене Питагорине теореме у геометрији, објашњен је феномен настанка основних Питагориних тројки бројева на два начина, који су познати као:*

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,\ z = u^2 + v^2 \text{ i } x = pq,\ y = (p^2 - q^2)/2,\ z = (p^2 + q^2)/2,$$

уз додатне услове за целе позитивне бројеве ***u*** *и* ***v*** *тј.* ***p*** *и* ***q****.*

Циљ овог излагања је да охрабри наставнике математике у основним школама да састављају задатке (из области примене Питагорине теореме) са „лепим“ решењима.

Кључне речи: Питагорине тројке бројева, узајамно прости бројеви, природни бројеви.

Питагорини бројеви

Свака тројка целих позитивних бројева a, b, и c која задовољава једначину $a^2 + b^2 = c^2$, зову се *Питагорини бројеви*[1]. Јасно је да они представљају дужине странице правоуглог троугла. Такав троугао ћемо означити са (a, b, c) где ће број c означавати хипотенузу.

Прво се поставља питање егзистенције: да ли постоје такви бројеви? Одговор је потврдан, сазнањем познатог „египатског“ троугла (3, 4, 5). Заиста: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ако ове бројеве множимо било којим другим бројем m>0, добијамо нови Питагорин троугао, тј. (ma,mb,mc), јер

[1] Питагорини троуглови (бројеви) били су познати још у време Старог Вавилона, Египта и Грчке. Претпоставља се да су Питагора и његови ученици пронашли начин за одређивање тројке Питагориних бројева по формулама: $x = 2n + 1$, $y = 2n\,(n + 1)$, $z = 2n^2 + 2n + 1$.

$$(ma)^2 + (mb)^2 = (mc)^2,$$

$$m^2 (a^2 + b^2) = m^2 c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Геометријска чињеница је да су сви ови троуглови, добијени на овај начин, слични. Међу њима један је свакако најмањи. Он се зове *основан (примитиван) троугао*, а сви остали *изведени*. Питагорини бројеви који одговарају најмањем Питагорином троуглу зову се *основни Питагорини бројеви.* Очигледно никоја два основна Питагорина троугла нису слична.

Нас интересују само основни Питагорини троуглови (бројеви), а помоћу њих можемо пронаћи све остале.

Разматрамо особине основних Питагориних бројева (a, b, c):

1. Три броја у основној тројци (a,b,c) су узајамно прости, јер ако нису, тада они нису најмањи, па не представљају основну тројку.

2. Свака два броја (у пару) у основној тројци (a, b, c) су узајамно прости, тј. немају заједнички делилац. Ако претпоставимо супротно нпр. a $=a_1d$ и $b=b_1d$, (a_1, b_1 - природни бројеви), из једначине:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

следи:

$$a_1^2 d^2 + b_1^2 d^2 = c^2,$$

$$(a_1^2 + b_1^2) d^2 = c^2,$$

$$a_1^2 + {}_1b^2 = (c/d)^2,$$

зато што c/d треба да буде цео број, следи да d|c, па a, b и c немају заједнички делилац, тј. не чине основну тројку. Значи, (a, b)=1. Слично се доказује да су

$$(a, c) = 1 \text{ и } (b, c) = 1.$$

3. Бројеви a, b, c не могу бити истовремено три парна броја, а ни у паровима, јер онда имају заједнички делилац, па нису узајамно прости. Они не могу бити ни непарни истовремено. Ако претпоставимо да су непарни, тј.

$a = 2k + 1$, $b = 2p + 1$, $c = 2r + 1$ ($k, p, r \in N$), онда из израза:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

следи:

$$(2k + 1)^2 + (2p + 1)^2 = (2r + 1)^2$$

$$4 (k^2 + k + p^2 + p) + 1 = 4(r^2 + r).$$

Ова једначина је немогућа јер је лева страна непарна, а десна страна је парна.

Из свега овога следи да за три броја у Питагориној тројци важи: *један број је паран, а друга два су непарна.*

Доказаћемо да број c (хипотенуза), не може бити паран број.

Нека је c паран број тј. $c = 2r$, онда морају a и b да буду непарни, $a = 2k + 1$, $b = 2p + 1$, па једначина гласи:

$$(2k + 1)^2 + (2p + 1)^2 = (2r)^2$$

$$4 (k^2 + k + p^2 + p) + 2 = 4 r^2$$

$$2 (k^2 + k + p^2 + p) + 1 = 2 r^2$$

Лева страна је непаран, а десна је паран број, што значи да претпоставка није тачна. Значи:

1) c мора бити непаран број,
2) један од бројева a и b је паран, а други непаран.

Изналажење формула за одређивање основних Питагориних тројки

У општем случају можемо узети да је x - непаран, y - паран број (z - увек непаран). Тражимо целе позитивне бројеве x, y, z који су по паровима узајамно прости и испуњавају једнакост

$$x^2 + y^2 = z^2 \;\Rightarrow\; \mathbf{y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)\,(z + x).}$$

Како је збир и разлика два непарна броја паран број, следи да су z-x и z+x парни бројеви и да је њихов заједнички делилац број 2, тј. бројеви (z - x)/2 и (z - x)/2 су узајамно прости бројеви. Ако претпоставимо да нису, онда $(\exists\, t,k,p \in \mathrm{N})$ тако да важи

$$\frac{z-x}{2} = t*k, \text{ и } \frac{z+x}{2} = t*p,$$

одакле следи да је z = t (k + p) и x = t (k - p). Из ове једнакости следи да z и x имају заједнички делилац t, што је у противуречности да су (z,x) = 1.

Тада:

$$\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{z+x}{2} * \frac{z-x}{2},$$

где су $\frac{y}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2} \in \mathbf{Z}$, јер су y, z - x и z + x парни.

Бројеви $\frac{z+x}{2}$ и $\frac{z-x}{2}$ су узајамно прости, а њихов производ је потпун квадрат. Наиме, ако је производ два узајамно проста броја потпун квадрат, онда су и сами бројеви потпуни квадрат.

Нека су (m, n) = 1 и $m \cdot n = k^2$ $(k \in \mathrm{N})$ *тада њихов производ може да се напише као* $mn = k_1^2\, k_2^2 \ldots k_p^2$, *где* k_i^2 *дели десну страну,* $\Rightarrow$ k_i^2 *дели леву страну, тј.* $k_i^2 \mid m \cdot n$, *али како m и n немају заједнички делилац, онда сваки од* k_i^2 *дели или m, или n. Заиста, m и n се разлажу на чиниоце који се садрже у* $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$, *тј. чиниоци који су потпуни квадрати. Значи, m и n су потпуни квадрати .*

Из те чињенице, да су $\frac{z+x}{2}$ и $\frac{z-x}{2}$ квадрати природних бројева, можемо да уведемо замену $\frac{z+x}{2} = u^2$ и $\frac{z-x}{2} = u^2$ $(u, v \in \mathrm{N})$ и u > v

$$\Rightarrow z = u^2 + v^2, \quad x = u^2 - v^2 \text{ и } y = 2\,u\,v.$$

Бројеви u и v су узајамно прости бројеви, јер ако нису, онда и бројеви $\frac{z+x}{2}$ и $\frac{z-x}{2}$ ће имати заједнички делилац, што је немогуће.

Бројеви u и v нису истовремено парни или непарни, јер за:

$$x = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$$

број x биће паран, што је у контрадикцији са претпоставком да је

x – непаран. Следи, један од бројева u и v је паран, а други непаран. Добијени резултат можемо изразити преко следеће теореме:

<u>Теорема</u>: Све основне тројке Питагориних бројева, у случају да је y паран број, одређују се по формулама (A) где су u и v узајамно прости бројеви, један је паран, а други непаран и $u > v > 0$.

$$x = u^2 - v^2$$
$$y = 2uv$$
$$z = u^2 + v^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(A)}$$

Другим речима, (A) су потребне за сваку тројку питагориних бројева, где је y паран број.

Други начин за одређивање Питагорине тројке можемо добити ако једначину

$$x^2 + y^2 = z^2$$

напишемо у облику:

$$x^2 = z^2 - y^2,$$
$$x^2 = (z - y)(z + y).$$

Зато што је z непаран број, а y паран, следи да су бројеви z-y и z+y непарни бројеви. Истовремено, они су узајамно прости. Њихов производ је потпун квадрат, па су и они потпуни квадрати.

Ако претпоставимо да је: $z + y = p$ и $z - y = q$, $(p > q,\ \ p, q \in N)$ добијамо да је:

$$x = pq$$
$$y = (p^2 - q^2)/2$$
$$z = (p^2 + q^2)/2 \qquad\qquad (Б)$$

Лако се утврђује да су p и q два непарна броја и узајамно проста.

Може се доказати да, формуле (Б) су потребан и довољан услов, да би (x, y, z) биле основне Питагорине тројке. Другим речима, формуле (Б) са додатним условима за p и q, дају све основне тројке Питагориних бројева.

Формуле (А) и (Б) су једнозначне и еквивалентне, тј. ако p и q у формулама (Б) заменимо са: $\boldsymbol{p = u + v; q = u - v}$ (u > v), добијамо:

$$x = (u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

$$y = \frac{(u + v)^2 - (u - v)^2}{2} = 2uv$$

$$z = \frac{(u + v)^2 + (u - v)^2}{2} = u^2 + v^2,$$

што значи да добијамо формуле (А). Суптротно, ако у (А) заменимо u и v са: $\boldsymbol{u = (p + q)/2}$, $\boldsymbol{v = (p - q)/2}$, добијамо формулу (Б).

Значи, све основне тројке Питагориних бројева одређују се по формулама (А) или (Б).

У следећој табели (табела бр. 1), дате су прве 22 основне тројке Питагориних бројева одређених помоћу формула (А), а у табели бр. 2 приказани су исти бројеви одређени помоћу формула (Б). Види се да су то исте тројке, само на различитим местима.

Табела бр. 1

u	**v**	**x**	**y**	**z**
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
10	7	51	140	149
10	9	19	180	181

Табела бр. 2

p	**q**	**x**	**y**	**z**
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
11	1	11	60	61
11	3	33	56	65
11	5	55	48	73
11	7	77	36	85
11	9	99	20	101
13	1	13	84	85
13	3	39	80	89
13	5	65	72	97
13	7	91	60	109
13	9	117	44	125
13	11	143	24	145
15	1	15	112	113
15	7	105	88	137

Још неке особине основних Питагориних тројки

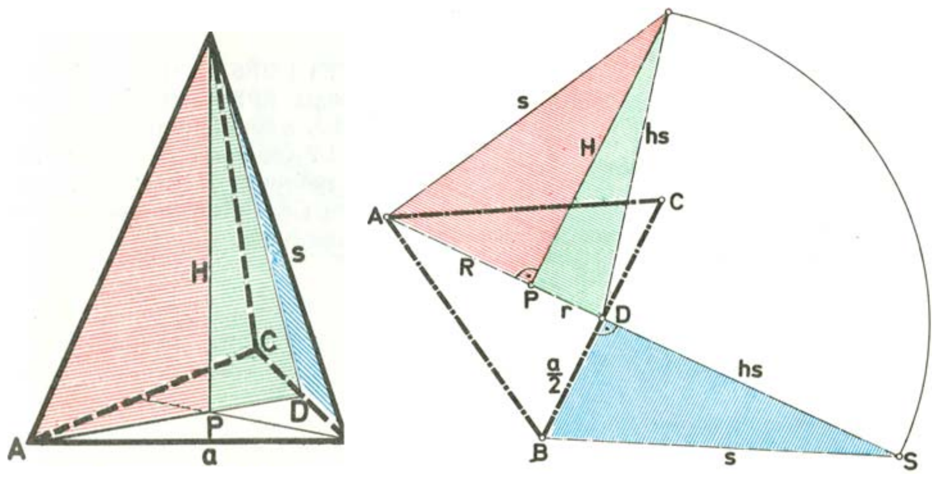
Из табела се јасно може закључити да је:

- Једна катета је дељива са 4, тј. 4 дели y;
- Збир $y+z$ *је* увек тачан квадрат, јер је $y=2uv$, а $z=u+v^2$, следи $y+z=(u+v)^2$;
- У сваком основном Питагорином троуглу бар једна катета је увек дељива са 3;
- У сваком основном Питагорином троуглу бар једна страниса је увек дељива са 5.

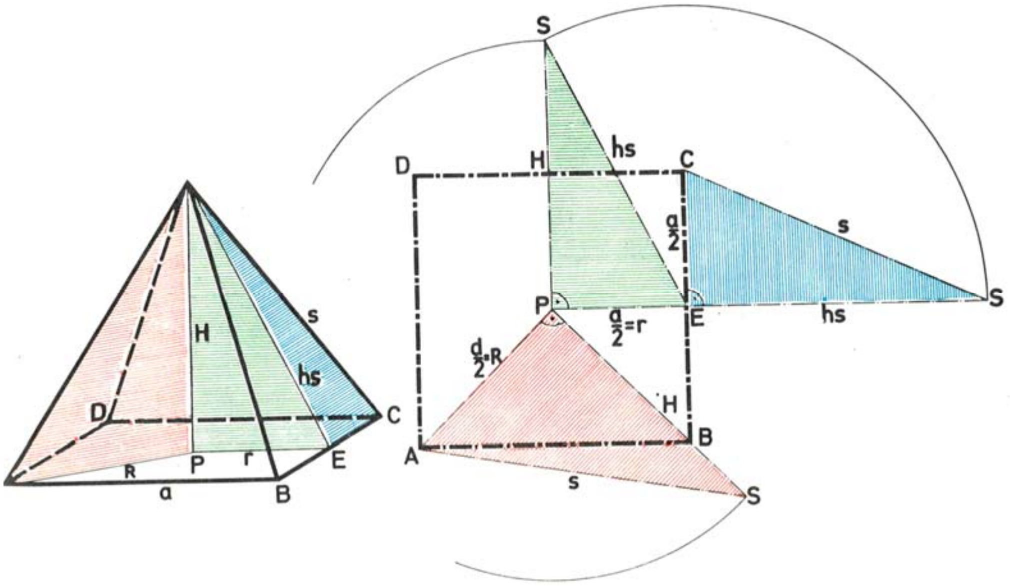
Значи, бар један од бројева из Питагорине тројке бројева је дељив са бројевима 1, 2, 3, 4 или 5.

Примена Питагориних тројки на карактеристичне троуглове код неких геометријских тела

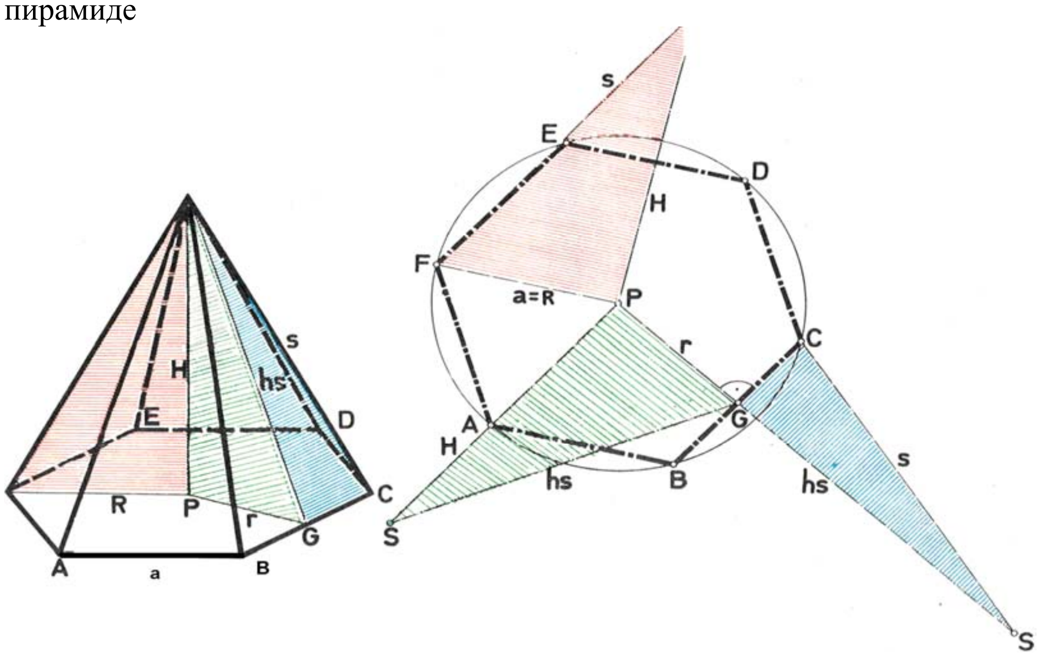
Слика 1: Карактеристични троуглови праве правилне тростране пирамиде.



Слика 2: Карактеристични троуглови праве правилне четворостране пирамиде



Слика 3: Карактеристични троуглови праве правилне шестостране пирамиде



ЛИТЕРАТУРА

1. Солаков Е., Чимев К., (1967.), *Питагорова теорама,* Наука и искуство, Софија.

2. Живановић М., (2005.), *Питагорини и Херонови бројеви,* Архимедес, Београд.

3. Мићић В., Каделбург З., Ђукић Д., (2004.), *Увод у теорију бројева*, 4. Издање Друштва математичара Србије, 2004.

Alija Mandak, PhD
Faculty of Teacher Training, Leposavić
Zlatka Pavlicić
T.Š. ‘‘Nikola Tesla’’, Leposavić

PYTHAGORA NUMBERS

Abstract: *The origine of Pythagora numbers i.e. integer solutions of equation* $x^2 + y^2 = z^2$ *is not to be devided from the history of Pythagora theoreme .Due to the great importance and aplication of Pythagora tehorem in geometry the phenomenon of basic Pythagora triple numbers is being explained in two ways:*

$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$ *i* $x = pq, y = (p^2 - q^2)/2, z = (p^2 + q^2)/2,$

with additional conditions for integer positive numbers u and v i.e. p and q.

The aim of this paper is to encourage teachers of mathematics in primary schools to construct math problems (within the area of Pythagora theoreme) with `nice` solutions.

Key words: Pythagora triple numbers, related prim numbers, natural numbers