Зборник радова Учитељског факултета, 12, 2018, стр. 29-39
511.2
COBISS.SR-ID 268939276

Ваит Ибро[4]
Универзитет у Приштини – Косовској Митровици
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавићу
Еуген Љајко[5]
Универзитет у Приштини – Косовској Митровици
Природно-математички факултет у Приштни – Косовској Митровици

ПРОСТИ, САВРШЕНИ И ПРИЈАТЕЉСКИ БРОЈЕВИ

Сажетак: *Рад разматра теорију бројева која представља велику област математике. Она је расцепкана на делове које су довољно богати сами по себи.У раду немамо намеру да излажемо теорију и доказе већ да кроз историјску димензију и хронологију откривања законитости, за потребе учитеља, пружимо информације о њеном значају и примени. Појавом информатичке технологије дошло се до тога да ова теорија може да пружи многе одговоре и решења о стварним проблемима.*

Кључне речи: *прости бројеви, савршени бројеви, пријатељски бројеви.*

УВОД

Теорија бројева је једна од најстаријих области математике. У њој се проучавају особине целих бројева, а посебно особине природних бројева. Откривање занимљивих и неочекиваних односа између различитих врста бројева као и доказивање истинитости различитих тврђења је циљ ове теорије. Фридрих Гаус (Gauss, C. F., 1777-1855) је математику називао краљицом наука, а теорију бројева краљицом математике. Проблеми и тврђења у овој теорији се исказују на врло једноставан и разумљив начин, иако решења проблема и докази захтевају софистицирану математичку позадину. Ова теорија, до средине двадесетог века, сматрана је делом математике који нема дирентну примену у стварном животу.

БРОЈЕВИ У МАТЕМАТИЦИ

У математичким теоријама сусрећемо се са фундаменталним појмовима међу којима подразмевамо и природне, целе, рационалне, ирационалне, реалне и комплексне бројеве, као и

[4] vajtgora@gamil.com
[5] eugen.ljajko@pr.ac.rs

појмови пребријивости и бесконачности, који прожимају знатан део математике. Разумевање бројева је једна од најстаријих математичких вештина. Многе културе додељују неке мистичне особине бројевима због њиховог великог значаја у описивању природе. Иако математика не признаје такве ставове, значај теорије бројева је неспоран.

Скуп *природних бројева* се означава са N = {1, 2, 3, 4, … } и често се проширује нулом тј. N_0 = {0, 1, 2, 3, …}. Проширивањем скупа природних бројева добијамо скуп *целих* бројева који означавамо са Z = {… -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}. *Рационалан* број се дефинише као количник (однос) два цела броја и скуп рационалних бројева означавамо са $Q = \{a/b \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$.. Скуп целих бројева је подскуп скупа рационалних бројева. Број је *ирационалан* ако није количник било кога пара целих бројева и те бројеве означавамо са I. Такву дефиницију задавољавају бројеви: π; $\sqrt{2}$; -$\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{3}$; …. Доказ ове теореме се може наћи о свим уџбеницима за средњу школу. Важно је напоменути да је Питагора своју теорију о универзму градио на претпоставци да су сви бројеви рационални, па је сазнавши за откриће поручио изумитељу да се удави, како би се отклонила опасност по ову теорију. Касније је у Грчкој, Платон са сигурношћу тврдио да свако ко не зна да је $\sqrt{2}$ ирационалан број, није човек већ животиња. Унија скупова рационалних и ирационалних бројева чине скуп *реалних* бројева које означавамо са R.

Табела 1: Скупови бројева са карактеристикама

Име скуп	Објашњење	Ознака	Примери
Природни бројеви	Сви позитивни неразломљени бројеви	N	1; 2; 3;
Цели бројеви	Сви позитивни и негативни неразломљени бројеви и нула	Z	-10; 259; -68; 8
Рационални бројеви	Бројеви који се могу приказати у облику разломка. Коначни децимални бројеви и они код којих се децимале понављају	Q	-3/5; 8/15; 1,3333…; 16/1; …
Ирационални бројеви	Бројеви који се не могу приказати у облику разломка. У децималном запису су бесконачни и не понављају се децимале.	I	π; $\sqrt{2}$; -$\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{3}$; …
Реални бројеви	Сви бројеви који се могу приказати на бројевној правој	R	6; 3,56; -1/5; π; …

У математици пребројив скуп је онај чији је број елемената (кардинални број) једнак броју елемената (кардинални број) неког подскупа природних бројева. Ово је увео Георг Кантор (G. Cantor

1845-1918), а потиче од чињенице да за бројање користимо природне бројеве. На основу табеле, примећујемо да свакој тачки на правој одговара један и само један број реалан, рационалан или ирационалан. Скуп реалних бројева је свуда густ на правој, јер између свака два увек можемо да одредимо место још једног.

Неограниченост скупова рационалних и реалних бројева увело нас је у две различите врсте бесконачности. Бесконачност свих рационалних бројева може се пребројити, или избројити као код природних бројева {1, 2, 3, … }, и за ову бесконачност се каже да је *пребројива* (denumerable). Бесконачност свих реалних бројева, која обухвата бесконачност свих рационалних бројева, *не* може да се изброји, и за њу се каже да је *непребројива* (non-denumerable). Под пребројивим скуповима најчешће се подразумевају и коначни скупови, па када желимо да нагласимо да је скуп бесконачан и пребројив кажемо да је пребројиво бесконачан скуп.

Посматрајмо позитивне рационалне бројеве 1, ½, 2, 1/3, 3, ¼, 2/3, 3/2, 4, 1/5, ..., (1=1/1, 2=2/1, 3=3/1, ...) где они бројеви који имају мањи збир бројиоца и имениоца предходе онима који имају већи такав збир. Такви збирови за наведене рационалне бројеве су:

2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, ...
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)

где су испод збирова написани природни бројеви 1, 2, 3, ... који одговарају положајима бројева у низу. Примећујемо да је седми број 2/3, десети 1/5, а број 4/6 се не појављује у том облику и није сведен на најпростији израз 2/3 који се појављује у низу. Сваки рационалан број појављује се само једанпут у низу и има јединствено означно место 1 или 2 или 3, ... На тај начин закључујемо да је скуп рационалних бројева пребројив.

ПРОСТИ БОЈЕВИ

Теорија бројева као независна математичка област има свој извор у радовима Де Ферма (P. S.de Fermat 1601-1665). Био је правник и народни посланик, а математика му је била хоби, али се развио у мајстора над мајсторима. Његово проницање у битне особине природних бројева ни до данашњих дана није надмашено. Ферма, Паскал и други француски математичари првих година XVII века имали су заједничког пријатеља, монаха Мерсена (M. Mersenne 1588-1649) који је разносио математичка и научна писма својих пријатеља, а у аритметици постоји захваљујући бројевима који носе његово име.

За неки број p већи од 1 каже се да је прост ако је дељив без остатка једино самим собом и јединицом.

За број већи од 1 који је, осим собом и јединоцом, дељив без остатка још неким другим бројем, кажемо да је сложен.

Пример: Бројеви: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... су прости, а бројеви 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ... су сложени.

Посматрајући ова два скупа бројева, на први поглад, разлика између њих није од великог значаја. Испоставило се да из сваке нооткривене чињенице о простим бројевима проистиче низ нових математичких сазнања. Разлог важности простих бројева јесте тај што су они међу целим бројевима као цигле од којих су остали саграђени. Проблем простих бројева често звучи као једноставан али је на њему веома напорно радити, што математичарима представља велики изазов коме је тешко одолети.

Питање који се намеће о простим бројевима јесте: колико их има? Као што пример показује, од првих двадесет бројева скоро је половина простих. Што се даље иде, изгледа да се њихов број смањује. Одговор који је дат у Еуклидовим ''Елементима'' (Euclid 365-275. pre n. e.) и данас се сматра једним од најбрилијантнијих математичких доказа који су икада изведени.

Да би то доказао, он је говорио да једино ако постоји коначан број простих бројева, тада мора постојати један највећи од свих њих, рецимо P. Користећи теореме да сваки цео број има бар један делилац који је прост број и да је број делилаца ма ког целог броја је коначан, можемо замислити да су сви прости бројеви помножени између себе и производу додати 1: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot P+1$. Ако сада добијени број поделимо редом са сваким простим бројем 2, 3, 5, ..., P, остатак ће бити 1. Што значи да добијени број није дељив ни једним од ових простих бројева а то повлачи да је сам прост или дељив неким простим бројем већим од P, што противуречи претпоставци да је P највећи прост број. Значи, „број свих простих бројева је бесконачан“. Доказ ове теореме не даје одговор како се одређује следећи прост број.(Kit, D., 2001)

Сваки прост број је, ма како био кратак или дуг, једноставна ствар. Већина бројева, наиме, осим што се може поделити са 1 или са самим собом, дељива је и са неким другим бројевима. Прости бројеви, међутим, осим себе самих и јединице, немају других делилаца. Но, упркос томе, њихови низови или они сами показују многа чудесна својства.

Од старијих теорема о простим бројевима добро је споменути једну од Фермаових теорема коју је он доказао и гласи: Сваки прост број облика $4n + 1$ јесте збир два квадрата на један јединствен начин.

Пример: $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$, $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1 + 16 = 1^2 + 4^2$, $29 = 4 + 25 = 2^2 + 5^2$, $101 = 1 + 100 = 1^2 + 10^2$.

Посебно место у теорији бројева имају Фермаови бројеви

$F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Пример: $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$, $F_4 = 65\,537$, $F_5 = 4\,294\,967\,297$.

Његова идеја је да наведена формула даје као резултат само просте бројева за $n = 1, 2, 3, \dots$. Међутим Ојлер је 1732. године факторисао F_5 као: $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$. Следећи F_6 такође није прост број и није могуће написати га у нефакторисаном облику, али факторисани облик је:

$$F_6 = 274\,177 \cdot 67\,280\,421\,310\,721.$$

У наредном периодудоказано је да F_n није прост број за вредности

$$n = 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73.$$

Проблем доказивања основаности или неоснованости тврђења да постоји само коначан број простих бројева F_n је отворен.

Бројеви облика $M_n = 2^n - 1$, $n \in N$, називају се Мерсенови бројеви. Поставља се питање, за које вредности n је број M_n прост?

Тврђење: Ако је M_n прост, тада и n мора бити прост.

Марин Мерсен је, 1644. године, тврдио да за $n \leq 257$, M_n прости бројеви су за следеће вредности n: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Грешка: $M_{67} = 193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287$

$M_{257} = 535\,006\,138\,814\,359 \cdot 1\,155\,685\,395\,246\,619\,182\,673\,033 \cdot 374\,550\,598\,501\,810$

С друге стране, у скупу наведених бројева недостају M_{61}, M_{89} и M_{107} који су прости.

Прости Мерсенови бројеви имају улогу у конструкцији савршених бројева.

Поставља се питање, за које вредности n је број M_n прост? (Erik, T., B., 1967)

Не постоји највећи прост број, сам по себи. Новооткривени, највећи до сада прост број пронађен је уочи Нове године, 2017. и потврђен након више драстичних провера за које је моћним рачунарима потребно и по неколико дана рачунања. Број је заиста велики и немогуће би било само навести га а има 23.249.425 цифара. Први га је открио један инжењер из Тенесија у Америци и зато освојио награду од три хиљаде долара.

Математичари су му дали ознаку $M_{77\,232\,917}$ и он је за читавих милион цифара већи од претходно највећег простог броја који је откривен 2015. године. Почиње цифрама 46 и након чудовишног низа, завршава се цифрама 71.Нови прост број је такође, Мерсенов број и може се записати као $2^{77\,232\,917} - 1$.

Табела 2: Пет највећих простих бројева

Број	Број цифара	Година откривања
$2^{77\,232\,917} - 1$	23 249 425	2017
$2^{74\,207\,281} - 1$	22 338 618	2016
$2^{57\,885\,161} - 1$	17 425 170	2013
$2^{43\,112\,609} - 1$	12 978 189	2008
$2^{42\,643\,801} - 1$	12 837 064	2009

Извор: Б. Башић, 2017

Овај резултат није од великог значаја за математику, али представља симбол у част истраживача који се такмиче ко ће пронаћи што веће бројеве. Задатак проналажења нових простих бројева „аналоган је пењању на Монт Еверест".

САВРШЕНИ БРОЈЕВИ

Савршени бројеви улазе у аритметику са Питагорејцима који су им приписивали мистичне и помало апсурдне особине. Савршени број је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца (укључујући и јединицу).

Математички изражено, ако $S(n)$ означава суму свих дељитеља n укључујући 1 и само n, за n се каже да је савршен ако је $S(n) = 2n$.

Пример: 6 = 1+2+3, 28=1+2+4+7+14

Прва четири савршена броја су позната од давнина (пре 2000 година). Трећи савршен број је 496, четврти 8128, пети савршен број је 33.550.336 откривен је око 1460. године. Осамнаести савршени број има 1937 цифара, а познато је четрдесет савршених бројева. Ојлер је доказао да парни савршени бројеви имају облик $2^{n-1}(2^n-1)$, где је 2^n-1 Мерсенов број, а обрнуто тврђење било је познато још Еуклиду.

Прва четири савршена броја су:
1) 6 = 1 + 2 + 3
2) 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
3) 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
4) 8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

Пети савршен број, који је откривен 1456. године, јесте 33 550 336. До сада је откривено само 49 савршених бројева, а последњи од њих, који је пронађен 7. јануара 2016. године, у свом запису има 44 677 235 цифара. Још није познато колико има савршених бројева – до сада није утврђено да ли их има бесконачно много или пак само коначан број.

На пример, првих пет савршених бројева се према тој формули добијају на следећи начин:
1) за $p = 2$, $2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$
2) за $p = 3$, $2^{3-1} \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$
3) за $p = 5$, $2^{5-1} \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$
4) за $p = 7$, $2^{7-1} \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$
5) за $p = 13$, $2^{13-1} \cdot (2^{13} - 1) = 4096 \cdot 8191 = 33550336$

Особине савршених бројева

Поред тога што представљају збир својих правих делилаца, савршени бројеви поседују и неке друге занимљиве особине.

1. Сви савршени бројеви представљају збир више узастопних природних бројева, почевши од броја 1 до $2^p - 1$.

Пример:

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$
$$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \ldots + 31$$
$$8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \ldots + 127$$
$$33550336 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \ldots + 8191$$

2. Збир реципрочних вредности свих делилаца савршеног броја, укључујући и сам тај број, једнак је броју 2.

Пример:

1) за број 6: 1/6 + 1/3 + ½ + 1/1= 2
2) за број 28: 1/28 + 1/14 + 1/7 + ¼ + ½ + 1/1 = 2
3) за бриј 496: 1/496 + 1/248 + 1/124 + 1/62 + 1/31 + 1/16 + 1/8 + ¼ + ½ + 1/1 = 2
4) за број 8128:1/8128+1/4064+1/2032+1/1016+1/508+1/254+1/127+1/ 64+1/32+1/16+1/8+1/4+1/2+1/1=2

3. Осим броја 6, сви савршени бројеви имају особину да се могу приказати као збир првих $2^{(p-1)/2}$ кубова непарних бројева.

Пример:

$28 = 1^3 + 3^3$

$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$

$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$

$33550336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 + ... + 127^3$

4. Сви познати савршени бројеви завршавају се са 6 или 28.

Пример: 6, 28, 496, 8128, 33550336, ...

5. Занимљив је бинарни запис савршених бројева тј. сваки од њих записан у облику бинарног записа, на основу записа у облику $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, има p јединица и $p - 1$ нула.

Пример:

1) $6_{10} = 110_2$
2) $28_{10} = 11100_2$
3) $496_{10} = 111110000_2$
4) $8128_{10} = 1111111000000_2$
5) $33550336_{10} = 1111111111111000000000000_2$
6) Занимљив је и запис савршеник бројева у облику:

$6 = 2 \ (1 + 2)$

$28 = 2^2 (1 + 2 + 2^2)$

$496 = 2^4 (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$

$8128 = 2^6 (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6)$

Случајност ???

Отворени проблеми:

1. Да ли постоји бесконачано много савршених бројева?
2. Да ли постоји непаран савршени број?

(Можда најстарији проблеми у математици, отворен близу 2500 година)

Уколико непаран савршен број N постоји, зна се да (Б. Башић, 2017):

- N има више од 1500 цифара;
- 105 не дели N;
- важи нешто од: N ≡ 1 (mod 12), N ≡ 117 (mod 468) или N ≡ 81 (mod 324);
- N облика $p^{\alpha}k^{2}$ за неки прост број $p \equiv 1 \pmod 4$, и природне бројеве k и α , $\alpha \equiv 1 \pmod 4$;
- највећи прост фактор броја N има бар 9 цифара;
- други највећи прост фактор броја N има бар 5 цифара;
- трећи највећи прост фактор броја N има бар 3 цифре:
- N има бар 101 прост фактор (рачунајући и вишеструкост);
- N има бар 10 различитих простих фактора;

(Башић, Б., 2017)

ПРИЈАТЕЉСКИ БРОЈЕВИ

Пријатељски бројеви познати су од давнина, а први (најмањи) пар пријатељских бројева чине 220 и 284. Природни бројеви a и b су пријатељски бројеви ако је збир правих делилаца бројева a (свих позитивних делилаца броја a, укључујући и број 1, али не рачунајући сам тај број) једнак броју b и истовремено збир правих делилаца броја b једнак броју a.

Прави делиоци броја 220 су: {1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110},

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.

Прави делиоци броја 284 су: {1, 2, 4, 71, 142}, 1 + 2 +4 + 71 + 142 = 220.

Познати француски математичар Пјер де Ферма пронашао је 1636. године други пар пријатељских бројева (17296, 18416), а Рене Декарт, чувени француски математичар и филозоф, пронашао је 1638. године пар пријатељских бројева који чине (9363584, 9437056). Откриће та два пара представљало је, у стрвари, њихово поновно откриће јер су оба пара знатно раније већ била позната арапским математичарима. Ферма и Декарт су, заједно, открили формулу за формирање пријатељских бројева, али се она не може применити на све парове пријатељских бројева. Касније се, међутим, испоставило да је сличну формулу, много пре њих, још у IX веку, пронашао Табит ибн Кора ал-Харани, арапски математичар и астроном. У XVIII веку, швајцарски математичар Леонард Ојлер уопштио је Ферманову формулу (Ојлерова формула такође се не може применити на све парове пријатељских бројева) и објавио списак од 61 пара пријатељских бројева, међу којима су два пара била погрешна. Шеснаестогодишњи Италијан Никоко Паганини пронашао је 1866. године други најмањи пар пријатељских бројева (1184, 1210), који су превидели ранији математичари и који је знатно мањи од Фермаовог пара.

Пријатељски бројеви били су познати још питагорејцима (математичарима који су живели у VI веку пре нове ере), а иако се за њих знало и пре нове ере, до 1946. године је пронађено само 390 парова пријатељских бројева. Захваљујући појави компјутера и њиховом брзом развоју, до 16. августа 2016. године, пронађено је чак 1 008 470 870 парова пријатељских бројева. Прво место на листи заузима пар (220, 284), иза њих је Паганинијев пар (1184, 1210), затим долази пар (2620, 2924), а Фермаов пар је тек на осмом месту. Данас су познати сви парови пријатељских бројева чији се мањи члан налази испод границе до 10^{18}.

(220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595), (17296, 18416), (63020, 76084), (66928, 66992), (67095, 71145), (69615, 87633), (79750, 88730), (100485, 124155), (122265, 139815), (122368, 123152), (141664, 153176), (142310, 168730), (171856, 176336), (176272, 180848), (185368, 203432), (196724, 202444), (280540, 365084), (308620, 389924), (319550, 430402), (356408, 399592), (437456, 455344), (469028, 486178), (503056, 514736), (522405, 525915), (600392, 669688), (609928, 686072), (624184, 691256), (635624, 712216), (643336, 652664), (667964, 783556), (726104, 796696), (802725, 863835), (879712, 901424), (898216, 980984), ...

У свим познатим паровима пријатељских бројева, оба члана су парна или, што је много ређе, оба непарна. Није познато да ли постоји мешовити пар, састављеног од једног парног и једног непарног броја. Такође, није позната формула која би се могла применити на све парове пријатељских бројева, нити се зна да ли таквих бројева има коначно или бесконачно много.

ЗАКЉУЧАК

Ови резултати нису од великог значаја за математику, али представљају симбол у част истраживача који се такмиче ко ће пронаћи што веће бројеве. Задатак проналажења нових простих, савршених и пријатељских бројева „аналоган је пењању на Монт Еверест“.

ЛИТЕРАТУРА

Бојан Башић, (2017), *Јесењи семинар за старије полазнике,* одржан 7.11. 2017. год., Петница, Департман за математику и информатику, Универзитет у Новом Саду

Erik Templ Bel (1967), Matematika kraljica i robinja nauke, Beograd, Vuk Karadzic

Kid Devlin (2001), Matematički gen, Beograd, ΠΛΑΤΟΩ

PRIME, PERFECT AND FRIENDLY NUMBERS

Summary: *The paper deals with the theory of numbers representing a large field of mathematics. It is split into parts that are rich enough by themselves. In this paper, we do not intend to expose theory and evidence, but through the historical dimension and chronology of the discovery of legality, for the needs of teachers, we provide information on its significance and application. With the advent of information technology, this theory has been able to provide many answers and solutions to real problems.*

Keywords*: prime numbers, perfect numbers, friendly numbers.*