

Проф. др Даниел А. Романо⁴⁸
Педагошки факултет у Бијељини

ЈЕДНО ИСТРАЖИВАЊЕ О СТУДЕНТСКИМ КОНСТРУКЦИЈАМА ФОРМУЛЕ СА ЛОГИЧКОМ ИМПЛИКАЦИЈОМ И ЊЕНОМ КОНТРАПОЗИЦИЈОМ

Анстракт: У овом раду излажемо резултате тестирања студената два техничка факултета у Бањој Луци о разумијевању и примјени логичке импликације и њене контрапозиције у једној реалној ситуацији. Ово дјелимично истраживање поткрепљује наше увјерење да популација тестираних студената иако не располаже побољним знањима о тим логичким концептима, ипак има потенцијал да уз орговарајуће подучавање експонира посједовање концептуалних и процесних знања у вези са овим логичким алатима.

Кључне речи: логика, импликација, контрапозиција, доказивање.

УВОД

Студенти многих факултета код нас у оквирима курса Опште математике слушају предавања о Математичкој логици. Према *syllabusu* тих предмета, математичкој логици је посвећено 9 или више часова предавања. При томе се студенти, посредством теме: „Увод у математичку логику“, упознају са:

- Алфабетом математичке логике,
- Аксиомама класичне логике
- Правилима закључивања у логици

и направи се увид у неколико ваљаних формула од посебног интереса за студенте ових студијских група.

Нас је увијек интересовало да ли студенти кондиционалне реченице из колоквијалног језика могу трансформисати у логичке формуле. Да ли препознају шта је довољан а шта потребан услов у тим реченицама? Зашто је ово интересантно питање? У процесу преговарања са реализаторима наставе о својој успјешности, у намјери да експонирају своје способности концептуалног и процесног мишљења али и процедуралних вјештина, студенти понекад имају обавезу да реконструишу неке доказе са предавања.

⁴⁸ bato49@hotmail.com

Овај поступак реконструисања се учи као мали дио курсева Опште математике у којима се студентима презентују елементи „Исказног“ и „Предикатског рачуна“ као подлога за поменуте реконструкције. Сасвим оправдано је покушати установити колико и како та стечена знања долазе до изражаја при студентским реконструисања доказа. Да би се стекао увид у студентска умјећа неопходна за реконструисање и разумијевање математичких доказа, истраживали смо студентска разумијевања формула у којима се појављује импликација. У овом тексту ми нудимо прикупљене показатеље као основу у трагању за одговорима на питања о студентим способностима конструисања формула од понуђених кондиционалних реченица о једној реалној ситуацији.

КОНЦЕПТ ЛОГИЧКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ

Импликација као логички везник, односно као логичка операција је најзначајнији логички концепт и својом значајношћу знатно превазилази остале логичке. Свако математичко тврђење се исказује на слиједећи начин: „Ако је ***H*** (Хипотеза), онда је ***T*** (Тврђење)“. Томе одговара формално појимање импликације: $H \Rightarrow T$. Она се чита и на један од слиједећих начина:

- *H* је довољан услова за *T*;
- *T* је потребан услов за *H*;
- *H* имплицира *T*;
- Ако је *H*, онда је *T*;
- Из *H* слиједи *T*;
- Из претпоставке *H* може се дедуковати закључак *T*.

О концептима логичке импликације погледати текстове Hoyles, C. and Kuchemann, D. (2002), Kuchemann, D. and Hoyles, C., (2002) и Saguillo, J. M., (2002).

МОТИВАЦИЈА

Многи истраживачи математичког образовања (на примјер, Milbou, L., Derpez, J. and Laenens, R., (2013)) исказују увјерење да подучавање логике помаже ученицима / студентима у квалитетнијем развоју њихових математичких умјећа. Истовремено, у истом тексту, истиче се да знатан број ученика / студената има проблема у разумијевању неких аспеката логике. У том смислу, на примјер, Лин, Ли и Ју у тексту Lin, F.L., Lee, Y.S. and Wu, J.Y. (2003) износе податак да 80% од 202 тестираних ученика, старости између 17 и 20 година, не располажу знањима негирања квантификатора егзистенције, а да код више од 70% тестираних ученика недостаје концептуално разумијевање доказа контрадикцијом. Међутим, исти аутори износе своје увјерење да постоји могућност да се таквим

ученицима помогне да разумију овај поменути концепт доказивања и да га примјењују у реалним ситуацијама.

Наше дугогодишње наставничко искуство подржава наше увјерење да студенти првих година техничких факултета код нас са повећаним потешкоћама разликују дефиниције концепата математичких објеката и процеса од изјава (теорема) у којима се региструју особине тих концепата. Ове последње су увијек облика импликације.

Логичка импликација има фундаменталну улогу у већем броју аспеката рационалног живота. Разумијевање елемената импликације, и њене контрапозиције, омогућава уочавање узрочно-последичних веза кондиционалних изјава колоквијалног језика. У бити, разумијевање неког текста у намјери да се понуди одговор на постављено питање, подразумева да се разумије окружење из којих би требало дедуковати неке закључке.

ТЕОРИЈСКА ЗАСНОВАНОСТ

У многим областима математичког образовања има основа за истраживања како студенти остварују разумијевање фундаменталних математичких структура и веза унутар њих. Многи аутори (на примјер, Hoyles, C. and Küchemann, D. (2002)) истичу да је недовољан број истраживања о томе како студенти разумију структуре логичких релација, а посебно логичке импликације.

Предавачи универзитетских курсева Calculusa често укључују неке од елемената формалне логике у те курсеве. Наравно, не постоји универзална сагласност како би то требало радити. Сусана Еп (Susanna S. Epp) у тексту (Epp, 2003) наводи да, "Верујем у представљање логике на начин који је непосредно повезује са језиком, са стварним свијетом и са математичким стварима." (стр. 895). Међутим, неки истраживачи математичког образовања тврде да постоји несклад између формалног размишљања и природног размишљања. (погледати на примјер текстове Ayalon, M. and Even, R. (2008a) и Ayalon, M. and Even, R. (2008b) Мајкла Ајалон и Рухаме Ивен (Ayalon and Ruhama). Има и оних који мисле да логика не мора бити експлицитно уводена иопште. На примјер, Гила Хан и Мајкл де Вилерс (Gila Hanna, Michael de Villiers) у тексту Hanna, G. and de Villiers, M. (2008) наводе: "Остаје нејасно каква корист долази од подучавање студената елементима формалне логике, због тога што многи математичари су спремни признати да се ретко користе формалном логиком у својим истраживањима." (стр 311.). Ени Селден и Џон Селден (Annie Selden and John Selden) у тексту Selden, J. and Selden, A. (2009) износе тврдњу да се "логика не појављује унутар доказа онолико често колико би се то могло очекивати ... " (стр. 347). Ова различита мишљења сугеришу да би било корисно додатно испитати улогу логике у студентким разумијевањима математичких доказа. Прегледавањем диступне литературе стиче се утисак да је таквих

истраживања спроведено много мање него то ова парадигма заслужује. (погледати, на примјер, мастер тезу Baker, S. (2001) Скота Бејкера (Scott Baker), или текст Chin, E.-T., and Tall, D. (2002) Ер-Цунг Чина и Дејвида Тола (Erh-Tsung Chin, David Tall). Ланс Рипс (Lance J. Rips) гледа на доказивање на нешто више софистициранији начин: "На најуопштенијем нивоу, формални доказ је коначан слијед реченица у којем свака реченица је или премиса, или аксиом логичког система, или реченица која слиједи из претходних реченица уз кориштење правила закључивања" (Rips, L. J. (1994), стр. 34). Посебну пажњу скрећемо читаоцима на текстове Hoyles, C. and Kuchemann, D. (2002), Kuchemann, D. and Hoyles, C., (2002), Целије Хојлес и Дитмара Кучемана (Celia Hoyles and Dietmar Kuchemann) те текст Deloustal-Jorrand, V., (2004) Вирђиније Дилустал-Жоранд (Virginie Deloustal-Jorrand) али и дисертације Ко Жи Лија (KoSze Lee) [KoSze Lee (2011)] и Милоша Савића Savic, M., (2012).

УЧЕСНИЦИ И ИСТРАЖИВАЧКИ МИЉЕ

Ово истраживање је рађено у два одвојена дијела: Испитивањем (06.11.2014.) популације прве године студената Технолошког факултета Универзитета у Бањој Луци (72 студента подијељена у четири групе) и Испитивањем (07.11.2014.) дјелимичне популације прве године студената Машинског факултета истог универзитета (40 студената подијељених у пет група). Подијела у групе је непожељну комуникацију између студената за вријеме тестирања смањила на најмању могућу мјеру.

ЦИЉЕВИ ИСТРАЖИВАЊА

Уважавајући резултате знатног броја истраживања о знањима математике свршених ученика средних школа код нас и прихватајући, као последицу тог уважавања, да кандидати не располажу логичким вакабуларом у својим когнитивним равнима, занимало нас је да ли тестирани кандидати располажу здраворазумским способностима разумијевања и употребе логичке импликације у једној реално могућој ситуацији.

МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

У оквирима улазног теста из Математике 1 студентима су постављени између осталих и слиједећи задатак:

Задатак 2. Дате су изјаве:

- (1) Ако сам добро спремио /ла градиво из Математике 1, положићу овај улазни тест из Математике 1.
- (2) Ако не положим овај тест из Математике 1, онда нисам добро спремио /ла градиво из Математике 1.

(3) Нисам положио / ла овај улазни тест из Математике 1, јер нисам добро спремио / ла градиво из Математике 1.

Означивши варијаблама (великим штампаним словима латинске абецеде А, В, ...) атоме у претходним реченицама, запиши те реченице формулама.

Циљеви овог задатка су били установљивање студентских умјећа;

(а) Разумијевање концепта елементарних (атома) и неелементарних логичких формула;

(б) Препознавање атома;

(в) Употребе логичких везника;

(г) Реконструкција (неелементарних) формула од атома на основу датих изјава;

и

(д) Препознавање хипотезе и консеквента у контекстуалним импликацијама за који вјерујемо да нам омогућавају установљивање математичких умјећа: *Разумијевање концепата, Стратегијске компетенције, и Адаптивно закључивање.*

Задаци су вредновани на начин да у утврђивању студентске успјешности омогућавају примјену технологије „дио по дио анализе“ (chunk-by-chunk analysis). О елементима технологије „дио по дио анализа“ (chunk-by-chunk analysis) погледати Савићев текст *Savic, M., (2012)*, или Милеров текст *Miller, G. (1956)*. Очекивани одговори на постављена питања у задацима подијељени су у самосталне дијелове који се више не могу разлагати:

1. Ознака \emptyset (празан скуп) значи да кандидат није понудио никакве информације као одговор на постављено питање.
2. Ознака 0 (нула) значи да су информације које је кандидат понудио потпуно неприхватљиве као валидан одговор на постављено питање.

РЕЗУЛТАТИ

Означимо словом A атом „Добро сам спремио / ла градиво из Математике 1.“, а словом B атом „Положио сам овај улазни тест из Математике 1.“

Питање **П1**: Препознавање формуле $A \Rightarrow B$.

Успјешност	1	0	\emptyset	Σ
Број	43	58	11	112
Фреквенција (%)	38.40	51.78	9.82	100

Табела 1. Дистрибуција прихватљивих одговора на питање П1. ($N = 112$)

Питање **П2**: Препознавање изјаве (2) у облику формуле $\neg B \Rightarrow \neg A$ као контрапозиције конструисане формуле $A \Rightarrow B$ у питању П1.

Успјешност	1	0	∅	Σ
Број	30	71	11	112
Фреквенција (%)	26.79	63.39	9.82	100

Табела 2. Дистрибуција прихватљивих одговора на питање П2. ($N = 112$)

Питање П3: Узрочни везник **јер** у изјави (3) би требало да омогућава препознавање дијела „Нисам добро спремио / ла градиво из Математике 1“, у облику $\neg B$, као довољног услова за закључак „Нисам положио /ла овај узасни тест из Математике 1“ у облику $\neg A$. Дакле, требало би да кандидати ову изјаву конструишу у облику формуле $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Успјешност	1	0	∅	Σ
Број	8	93	11	112
Фреквенција (%)	7.14	83.04	9.82	100

Табела 3. Дистрибуција прихватљивих одговора на питање П3. ($N = 112$)

Исказивање вјештина трансформација кондиционалних колоквијалних реченица реалне ситуације у логичке формуле битно зависи од комплексности понуђених реченица. Препознавање импликација типа $A \Rightarrow B$ реализовано је скромним успјехом (П1: 38.40%), док је контрапозиција импликације из Питања П1 препозната са врло скромним успјехом (П2: 26.79%). Препознавање одговарајуће логичке формуле изјавном условном реченицом (3) у постављеном задатку је екстремно скромно (П3: 7.14%). Ови резултати потврђују тврдње које се појављују у доступној литератури о потешкоћама студентског разумијевања конструисања логичке импликације и њеног инверза.

ЗАКЉУЧНЕ ОПСЕРВАЦИЈЕ

Иако је ова наша студија само иницијалног катактера са намјером да се стекне увид у студентска умјећа разумијевања поменутих концепата, два закључка се намеће сам по себи: Свршени ученици средњих школа могу да прихвате концепте логичке импликације и њене контрапозиције без већих потешкоћа. Студенти прве године техничких факултета уз адекватно подучавање елементима логике у најопштијој форми и учењем тих елемената, процјењује се, могли би експонирати значајније израђена когнитивна умјећа која се односе на разумијевање и употребу логичког алата импликације и њене контрапозиције.

Литература

- Ayalon, M. and Even, R. (2008a). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 235-247.
- Ayalon, M. and Even, R. (2008b). Views of mathematical educators on the role of mathematics learning in the development of deductive reasoning. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rotano, and A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 2* (pp. 113-120). Mexico: Cinvestav-UMSHN.
- Baker, S. (2001). Proofs and logic: An examination of mathematics bridge course proofs. *Unpublished master's thesis*. Cookeville, TN: Tennessee Technological University.
- Chin, E.-T., and Tall, D. (2002). Proof as a formal procept in advanced mathematical thinking. In F.-L. Lin (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (pp. 212-221). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.
- Deloustal-Jorrand, V., (2004): Studying the mathematical concept of implications through a problem on written proofs, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2 pp. 263–270.
- Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *MAA Monthly*, 110, 886-899.
- Hanna, G., and de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education (Discussion document). *ZDM-The International Journal of Mathematics Education*, 40(2), 329-336.
- Hoyles, C. and Küchemann, D. (2002), Students' Understandings of Logical Implication, *Educational Studies in Mathematics*, 51(3), 193-223.
- Kuchemann, D. and Hoyles, C., (2002), Students' understanding of a logical implications and its converse, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2002 Vol. 3 pp 241–248
- KoSze Lee (2011), *Student's logical reasoning and mathematical proving of implications*, Ph.D. Michigan State University.
- Lin, F.L., Lee, Y.S. and Wu, J.Y. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty and J.T. Zilliox, (Eds.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 443-450). Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.
- Milbou, L., Deprez, J. and Laenens, R., (2013), A study on the reintroduction of logic in secondary schools, In: *International conference 'The future of education', 3th edition*, Florence, Italy, 13-14, June 2013, Libreriauniversitaria.it Edizioni, Доступно на адреси: <http://conference.pixel-online.net/FOE/conferences/foe2013/conferenceproceedings.php>
- Miller, G. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63(2), 343-355.

- Rips, L. J. (1994). *The psychology of proof: Deductive reasoning in human thinking*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Saguillo, J. M., (2002): Conception of logical implications, *Logica Trianguli*, 6, 41-67
- Savic, M., (2012): *Proof and Proving: Logic, Impasses, and the Relationship to Problem Solving*; Ph.D. New Mexico State University, 2012.
- Selden, J. and Selden, A. (2009). Teaching proof by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 339-354). New York, NY: Rutledge.

A RESEARCH ON STUDENTS CONSTRUCTIONS OF FORMULAE WITH LOGICAL IMPLICATIONS AND ITS CONTRA-POSITION

Summary: *This paper presents testing results of the two Technical faculties in Banja Luka on understanding and application of logical implication and its contraposition in a real situation. This partial research confirms our belief that the population of tested students although does not owe enough knowledge about these logical concepts, anyway, still has a potential to, with corresponding teaching, show that they have conceptual and processing knowledge in relation to these logical tools.*

Key words: *logics, implications, contraposition, proving.*