
Мр Љиљана Пауновић²⁵

Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РАЧУНАРА

Апстракт: Резултати истраживања показују да традиционална настава не даје задовољавајуће резултате у учењу математике, па је према томе неопходно осавременили процес учења увођењем нових наставних средстава, мисли се пре свега на рачунаре. Данас се како од ученика у основним и средњим школама тако и од студената све више очекује да активно учествују у свим фазама наставе. Примена рачунара у настави омогућава максималну активност и комуникацију без посредника. Комуникација студент – компјутер је једноставнија јер студент по сопственој жељи добија све потребне информације.

Циљ рада је успостављање везе између различитих области математике, конкретно између математичке анализе која се бави проблемом функција, и нумеричке анализе чија је проблематика приближно решавање једначина. Овде ће бити речи и о софтверу GeoGebra чијом употребом се постижу добри резултати из разлога што дати софтвер нуди иконичко и симболичко представљање математичких објеката паралелно у геометријском и алгебарском прозору.

Кључне речи: функција, извод функције, итеративне методе, Њутнова метода, GeoGebra.

У В О Д

Мишљење многих је да је и данас могућа добра настава математике без нове технологије. Међутим, нова технологија представља нове алате који доносе нове дидактичке могућности и изазове. Увођењем рачунара у наставу математике добијен је нови когнитивни алат, тј. алат којим наставник може да управља и којег може да контролише. Могућност интерактивне манипулације објектима је главна и највећа предност нових медија у односу на традиционалну наставу. Ученици могу да откривају нове особине самостално, могу наслућене особине да провере, докажу или, ако је потребно да их коригују. Знање које се стиче кроз различита представљања лакше се задржавају. Способност да се знање транспонује у други облик повећава флексибилност и успех код решавања проблема. Ово је и основна дидактичка идеја програма GeoGebra. Програм

²⁵ ljiljana.paunovic@pr.ac.rs

GeoGebra је математички софтвер који повезује геометрију и алгебру. Развио га је Markus Hohenwarter са Универзитета у Салцбургу за проучавање математике у школама.

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ТВРЂЕЊА

Посматрајмо нелинеарну једначину облика $f(x) = 0$, у савременој нумеричкој анализи развијен је велики број метода за њихово решавање без обзира да ли су оне алгебарске или трансцендентне. Метод који се најчешће користи при решавању оваквих једначина је и Newtonov или Newton-Raphsonov метод.

Нека је $x_0 \in [a, b]$, претпоставимо да функцију f можемо развити у Taylorov ред око x_0 закључно са првим чланом, тј.

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0)$$

где је $x = a$ и $f'(x) \neq 0$. Како је $f(a) = 0$, добијамо

$$a \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Са x_1 означимо десну страну последње једнакости, при чему добијамо да је

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Последња једнакост сугерише конструкцију итеративног процеса (Newtonov итеративни процес) облика:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

Геометријски x_1 представља апсису тачке пресека тангенте на криву $y = f(x)$ у тачки $(x_0, f(x_0))$ са x осом.

Теорема: Нека је $f(a) = 0$, f класе C^2 и нека је $f'(a) \neq 0$. Ако је почетна итерација x_0 довољно близу a , низ x_n конвергира ка a .

Доказ: Како је $f'(a) \neq 0$, можемо изабрати $I = [a - \epsilon, a + \epsilon]$, тако да је $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Нека је број M дефинисан на следећи начин:

$$M = \frac{\max_{x \in I} |f''(x)|}{2 \min_{x \in I} |f'(x)|}. \quad (1)$$

Функцију f можемо развити у Taylorov ред око x_n па добијамо:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x - x_n)^2$$

Овде је x између x и x_n . Заменом $x = a$ и ако је $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ добијамо да је

$$a - x_{n+1} = -(a - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}. \quad (2)$$

Имајући у виду (1) и (2) за свако $x_0 \in I$ имамо да је

$$|a - x_1| \leq M |a - x_0|^2.$$

Изаберимо x_0 тако да осим што је у I , важи и $M |a - x_0| < 1$.

Сада је

$$|a - x_1| \leq |a - x_0| \leq e, \quad M |a - x_1| < 1.$$

Индукцијом се показује да важи и за свако $x_n, n \in \mathbb{N}$.

$$M |a - x_n| \leq (M |a - x_{n-1}|)^2 \leq \dots \leq (M |a - x_0|)^{2^n}.$$

Из $M |a - x_0| < 1$ следи $x_n \rightarrow a$, за $n \rightarrow \infty$.

Newtonov метод (метод тангенти) је метод са најбржом конвергенцијом, међутим и овај метод има низ недостатака.

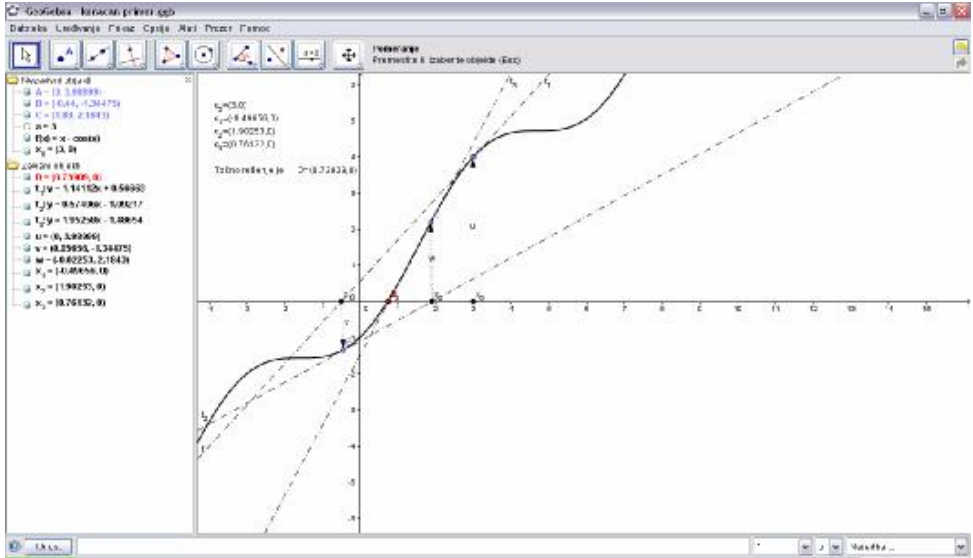
У сваком кораку неопходно је рачунати како вредност функције тако и њеног извода у некој тачки што у неким случајевима захтева извођење великог броја операција.

ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА ПРИМЕНОМ МАТЕМАТИЧКОГ СОФТВЕРА **GeoGebra**

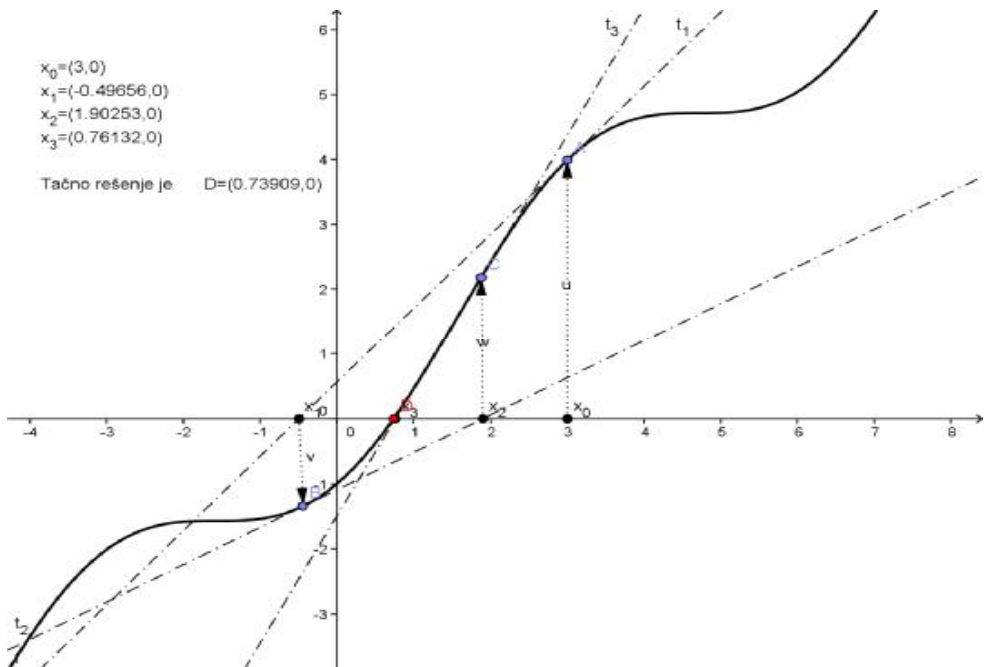
GeoGebra је математички софтвер који има широку примену из разлога што нуди могућност реализације динамичке геометрије, примена датог софтвера је врло једноставна, унос података је врло сличан стандардној нотацији тако да је лако прихватљив не само за студенте већ и ученике у средњим школама. Радне површине креиране у овом програму могу се преносити у html и word документе. Применом датог софтвера могу се израчунавати изводи функција, интеграли, нуле функција. У овом програму једначине и координате се директно задају. GeoGebra препознаје експлицитне и имплицитне једначине правих и конусних пресека, параметарско представљање правих као и поларне и Декартове координате тачака и вектора. Овај програм одређује средишта дужи, поред тога даје коефицијент правца, вектор правца и нормални вектор једне праве.

Између осталог GeoGebra се може применити и код проблема приближног израчунавања једначина, овај софтвер даје добре резултате код методе половљења интервала, методе сечице и свакако код Newtonove методе. Примену овог софтвера за приближно израчунавање једначина Newtonovom методом приказаћемо кроз примере.

Пример 1. Решити једначину $f(x) = x - \cos(x)$ применом Newtonove методе и математичког софтвера GeoGebra.



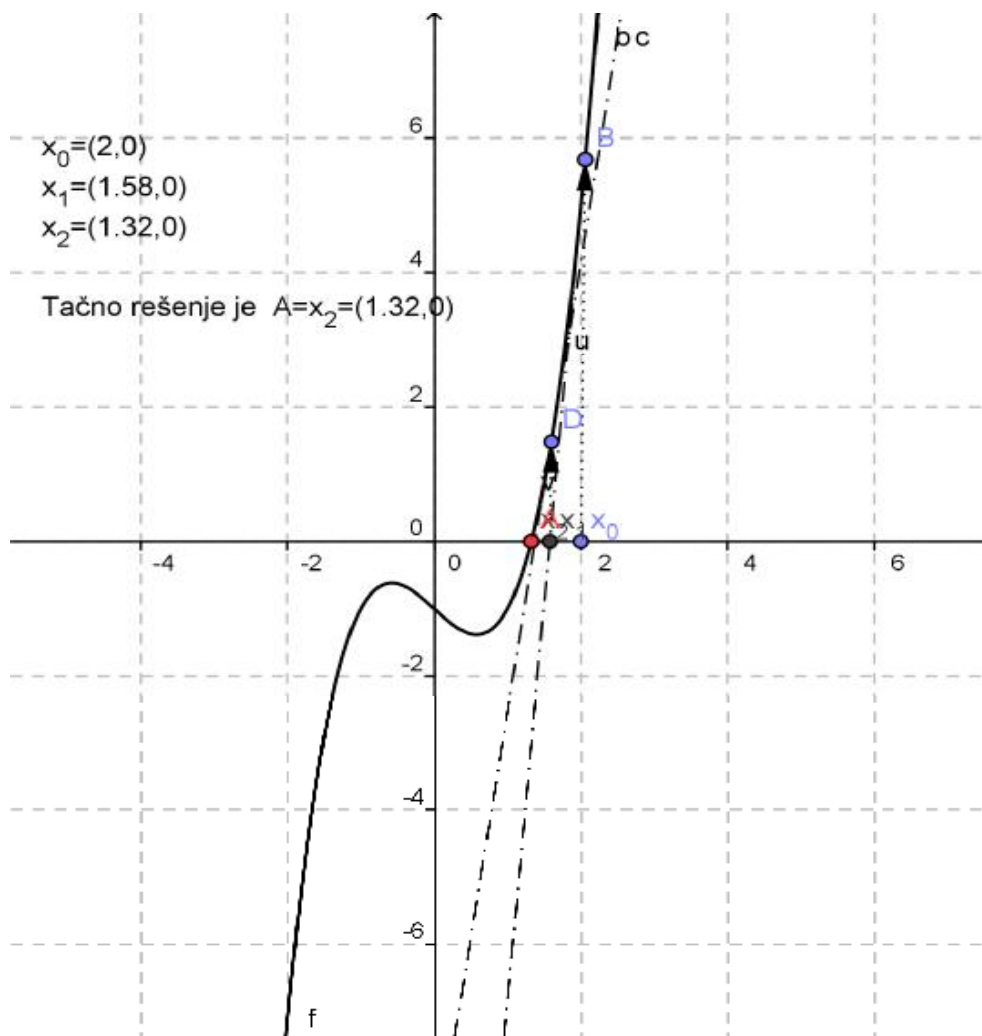
Слика 1.



Слика 2.

На *Слици 1.* дат је са леве стране алгебарски прозор а са десне стране геометријски прозор решавања датог проблема. На *Слици 2.* јасно се види изглед функције и поступак одређивања решења дате једначине.

Пример 2. Применом **Newtonovog** метода и програма **GeoGebra** решити једначину $f(x) = x^3 - x - 1$.



Слика 3.

ЗАКЉУЧАК

Идеја овог рада је увођење нових наставних јединица везаних за приближно решавање једначина у планове и програме гимназија, средњих техничких школа и факултета. У средњим школама се у четвртном разреду обрађује тема *Функције* као и *Извод функције* чиме је комплетан фонд предзнања потребних за изучавање итеративних процеса. Изучавањем итеративних процеса ученици би дошли до закључка да нумеричка математика нуди конкретна решења тамо где је стандардна давала само теоретска. Прави резултати би били постигнути ако би решавање свих ових проблема постигли применом рачунара, управо је GeoGebra софтвер који би одговарао свим нашим захтевима. Овај софтвер је крајње једноставан како за употребу тако и за инсталацију, довољно је повезати се преко интернета на www.geogebra.at. Софтвер је бесплатан и доступан на више од 20 језика укључујући и српски. GeoGebra је написана у Java-и, па је инсталација GeoGebre условљена претходном инсталацијом Java која је такође врло једноставна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hohenwartet, M., Hohenwartet, J. (2007): *GeoGebra Help*. Retrieved March 19, 2009. from <http://www.geogebra.org>.
2. Херцег, Д., Херцег, Ђ.(2007): *GeoGebra динамичка геометрија и алгебра*, Нови Сад.
3. Спалевић, М., Пранић, М.(2007): *Нумеричке методе*, Крагујевац, Природно-математички факултет у Крагујевцу.
4. Миловановић, Г., Ковачевић, М., Спалевић, М.(2003): *Нумеричка математика, збирка решених проблема*, Ниш, Електронски факултет у Нишу.
5. Миловановић, Г., Ковачевић, М.(1991): *Збирка решених задатака из нумеричке анализе*, Београд, Научна књига.
6. Тошић, Д.(1978): *Увод у нумеричку анализу*, Београд, Научна књига.
7. Лазић, М., Малиновић, Т., Мићић, В., Петровић, М., Томић, М.(1994): *Математика*, Београд, Учитељски факултет у Београду.

Ljiljana Paunović, M.Sc. Assitant
Teachers' Training Faculty in Prizren - Leposavić

**APPROXIMATELY SOLVING AN EQUATION
BY COMPUTER**

Summary: *Research results are showing that traditional teaching techniques do not deliver satisfactory results in learning Mathematics, so it is necessary to update the process of learning by introducing new teaching tools, thinking mainly on personal computers. Nowadays, active participation in all phases of courses is expected from primary and secondary pupils and students as well. Personal computer application within teaching process enables maximal activity and communication without any intermediates. Communication student – computer is simpler because the student gets all needed information by his own aspiration.*

The objective of this paper is establishing link between different areas of Mathematics, moreover between mathematical analysis dealing with function problems and numeric analysis dealing with approximate solving of equations. This paper will present the software GeoGebra and by using it good results are achieved where it offers parallel iconic and symbolic presentation of mathematical objects in geometric and algebraic window. GeoGebra has been created in Java, enabling independent usage in any of existing operational systems: Windows, Linux... Additionally, GeoGebra can be directly started though Internet Browsers - Internet Explorer or Netscape. As educational software GeoGebra enables simple manipulating, leaving space for pupils in discovering and experimenting in Mathematics. Education software apart to mathematical knowledge also looks for knowledge and skill in its usage, where GeoGebra is algebraic orientated and closer to school connotation.

Key words: function, derivation of function, iterative methods, Newtonov methods, GeoGebra.