Зборник радова Учитељског факултета, 9, 2015, стр. 195-201
UDK: 514.755
COBISS.SR-ID 218379020

Проф. др Алија Мандак[46]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ТЕЖИНСКАПРОЈЕКТИВНА РАВАН РЕДА 16 И ТОТАЛНО СИМЕТРИЧНА (2, 16 – 1)-МУЛТИКВАЗИГРУПА

Апстракт: *У раду се уводи појам тежишне пројективне равни која је уопштење обичне пројективне равни и доказује се да група Фробениуса реда 34 делује на пројективну раван P реда шеснаест као група колинеације. Користећи ово деловање раван P се може конструисати. Тежишна пројективна раван P' реда 16 је еквивалентна тотално симетричној (2, 16 – 1)-мултиквазигрупи.*

Кључне речи: *пројективна раван, група, колинеација, орбита.*

УВОД

Структура инциденције је тројка D = (V, B, I), где су V и B дисјунктни скупови и $I \subseteq V \times B$. Елементи скупа V зову се *тачке,* елементи скупа B зову се *блокови.* Ако је A тачка скупа V онда скуп свих блокова који су инцидентни са тачком A означава се са (A). Тако је

$$(A) = \{b: b \in B, A \, I \, b\}.$$

Даље, за $A_1, A_2, \ldots, A_n$, скуп свих блокова инцидентних са свим тачкама $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означава се са $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тако је

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \{b: b \in B, A_i \, I \, b \text{ for all } i \in N_n\},$$

где је N скуп свих позитивних целих бројева, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Дуално, за b, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$,

$$(b) = \{A: A \in V, A \, I \, b\},$$

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \{A: A \in V, A \, I \, b \text{ for all } i \in N_n\}.$$

Ми ћемо разматрати структуре инциденције у којима су различити блокови инцидентни са различитим скуповима тачака. Сваки блок b се идентификује са скупом тачака (b) а релација инциденције идентификује се са обичном релацијом $\in$.

[46] alija.mandak@pr.ac.rs

НЕКЕ ДЕФИНИЦИЈЕ И РЕЗУЛТАТИ

Дефиниција 1. Структура инциденције P = (V, B, I) зове се *пројективна раван* ако и само ако испуњава следеће аксиоме:

(P. 1) Било које две различите тачке спојене су са тачно једном правом.

(P. 2) Било које две различите праве секу се тачно у једној тачки.

(P. 3) Постоји *четвороугао,* тј. 4 тачке од којих било које три нису на заједничкој правој.

Следећа теорема је доказана у [1].

Теорема 1. Нека је P = (V, B, I) коначна пројективна раван. Постоји природни број n, зове се *ред* равни P, који испуњава:

a) $|(A)| = |(g)| = n+1$ за све $A \in V$ и $g \in B$;
b) $|V| = |B| = n^2 + n + 1$.

Коначна пројективна раван реда n означава се са $S(2, n + 1, n^2 + n + 1)$.

Следећа дефиниција уопштава појам коначне пројективне равни реда n.

Дефиниција 2. Коначна структура инциденције P = (V, B, I) зове се **тежинска пројективна раван** са параметрима $n^2 + n + 1, n + 1, 1 \in N$, ако за било које $b \in B$ постоји пресликавање $f_b : (b) \rightarrow N$ које испуњава следеће аксиоме:

(WD. 1) $|V| = n^2 + n + 1$;

(WD. 2) $|(A, B)| = 1$, за било које две различите тачке $A, B \in V$;

(WD. 3) $k_b = n + 1$, за било који блок $b \in B$, где:

a) слика $f_b(A)$ се означава са t_{Ab}, и зове се **тежина** тачке A на блоку b,
b) За тачку $A \in V$, **тежина** је $t_A = \Sigma_{A\in bi}\, t_{Abi}$, и
c) За $b \in B$, број $k_b = \Sigma_{Ai\in b}\, t_{Aib}$ се зове **дужина** блока b.

Дефиниција 3. Тежинска пројективна раван $S' = (V', B, \in)$ је **проширење** тежинске пројективне равни $S = (V, B, \in)$, ако $V \subseteq V'$ и за свако $b \in B$ постоји $b' \in B'$ тако да је $(b) \subseteq (b')$, и за свако $A \in (b)$, $t_{Ab'} = t_{Ab}$

Дефиниција 4. Проширење тежинске пројективне равни са параметрима $n^2 + n + 1, n + 1, 1$ дефинисано са

a) $V' = V$;
b) $B' = B \cup B''$ где је $B'' = \{\{A^{n+1}\}: A \in V\}$, и
c) За свако $A \in V$, $t_A = r + n + 1$, где је r број блокова у B који садрже A,

Зове се **комплетна тежинска пројективна раван** са параметрима $n^2 + n + 1$, $n + 1$, 1, и означава са $S'(2, n + 1, n^2 + n + 1)$.

Сада ми упоређујемо комплетну тежинску пројективну раван S’(2, n + 1, n^2 + n + 1) са појмом тотално симетричне (2, n – 1)-мултиквазигрупе.

Дефиниција 5. Нека је Q непразан скуп, n и m позитивни цели, и

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

пресликавање из Q^n у Q^m. Тада се структура Q(f) зове (n, m)-групоид.

Један (n, m)-групоид Q(f) зове се (n, m)-мултиквазигрупа ако и само ако су испуњена следећа тврђења:

(А). за сваки “вектор” $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in Q^n$ и сваку инјекцију φ из $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ у N_{n+m} постоји јединствен “вектор” $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+m})$ Q^{n+m} тако да је $b_{\varphi(1)} = a_1, \ldots, b_{\varphi(n)} = a_n$ и

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_{n+m}).$$

У раду [3] једна (n, m)-мултикгвазигрупа се интерпретира као (n, m)-мултиквазигрупна релација

Дефиниција 6. Једна (n + m)-арна релација $\rho \subseteq Q^{n+m}$ зове се (n, m)-мултиквазигрупна релација ако и само ако је испуњено следеће тврђење:

(А). За сваки “вектор” $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in Q^n$ и сваку инјекцију φ из $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ у N_{n+m} постоји јединствен “вектор” $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+m}) \in Q^{n+m}$ такав да је $b_{\varphi(1)} = a_1, \ldots, b_{\varphi(n)} = a_n$ и

$$(b_1, b_2, \ldots, b_{n+m}) \in \rho.$$

Следећа теорема је доказана у [3].

Теорема 2. Један (n, m)- групоид (Q, f) је (n, m)-мултиквазигрупа ако и само ако је (n + m)-арна релација $\rho \subseteq Q^{n+m}$ дефинисана са

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \rho \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$$

(n, m)-мултиквазигрупна релација.

Дефиниција 7. Једна (n, m)-мултиквазигрупа зове се *тотално симетрична,* ако и само ако је

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) \Leftrightarrow f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+m}).$$

за било који „вектор“ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) \in Q^{n+m}$ и било коју пермутацију $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+m})$ од $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Одговарајућа (n + m)-арна релација $\rho \subseteq Q^{n+m}$ у овом случају зове се *тотално симетрична.*

Следећа теорема је доказана у [7].

Теорема 3. Свака комплетно тежинска пројективна раван S’(2, n + 1, n^2 + n + 1) дефинише тотално симетричну (2, n – 1)-мултиквазигрупну релацију $\rho \subseteq V^{n+1}$, где

$$(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) \in \rho \Leftrightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\} \in B.$$

Обратно, свака тотално симетрична $(2, n-1)$-мултиквазигрупна релација $\rho \subseteq V^{n+1}$ која задовољава услов $(A, A, \ldots, A) = (A^{n+1}) \in \rho$ за било које $A \in V$, дефинише комплетну тежинску пројективну раван $S'(2, k, n^2 + n + 1)$, где

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\} \in B \Leftrightarrow (A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) \in \rho.$$

КОНСТРУКЦИЈА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ РЕДА ШЕСНАЕСТ

Теорема 2. Група Фробениуса G реда 34 делује на пројективну раван P реда шеснаест као група колинеација. Користећи ово деловање раван P се може конструисати.

Доказ. Нека је

$$G = \left\langle \rho, \alpha \,/\, \rho^{17} = \alpha^2 = 1, \rho^{\alpha} = \rho^{-1} \right\rangle$$

Група Фробениуса реда 34 која делује на пројективну раван P реда 16 као група колинеација. Раван P има $16^2 + 16 + 1 = 273$ тачке и исто толико праве. Из $273 = 17 \cdot 16 + 1$ и из тврђења да колинеација $\langle \rho \rangle$ делује семирегуларно на нефиксним тачкама следи да $\langle \rho \rangle$ има 16 орбита тачака дужине 17 и једну орбиту дужине 1. Можемо узети да је

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_{16})(2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_{16})(3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_{16}) \cdots (16_0, 16_1, 16_2, \cdots 16_{16})$$

Где су $1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_{16}, 2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_{16}, 3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_{16}, \cdots 16_0, 16_1, 16_2, \cdots 16_{16}$ све тачке равни P.

Из теореме о орбитама следи да $\langle \rho \rangle$ има исту структуру орбита правих. Можемо узети да је

$$\rho = (\ell_\infty)(\ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \cdots, \ell_1\rho^{16})(\ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \cdots, \ell_2\rho^{16})$$
$$(\ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \cdots, \ell_3\rho^{16}) \cdots (\ell_{16}, \ell_{16}\rho, \ell_{16}\rho^2, \cdots, \ell_{16}\rho^{16})$$

Где су

$$\ell_\infty, \ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \cdots, \ell_1\rho^{16}, \ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \cdots, \ell_2\rho^{16}, \ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \cdots, \ell_3\rho^{16}, \cdots,$$
$$\ell_{16}, \ell_{16}\rho, \ell_{16}\rho^2, \cdots, \ell_{16}\rho^{16}$$

све праве равни P.

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle \rho \rangle$. Можемо узети да је

$$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \cdots, 1_{16}\}.$$

Нека је ℓ_1 права која пролази кроз ∞. Очигледно је да ℓ_1 садржи по једну тачку из сваке орбите тачака. Без губитка општости можемо узети да је

$$\ell_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \cdots, 16_0\}.$$

Осталих шеснаест правих орбите правих којој припада права ℓ_1 добијају се деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots, \rho^{16}$ на праву ℓ_1. Праве ℓ_1 и ℓ_∞ пролазе кроз 1_0. Осталих петнаест права $\ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_{16}$ које пролазе кроз 1_0 леже у петнаест преосталих различитих $\langle\rho\rangle$ - орбита правих равни P. Ако се конструишу ове праве онда преостале све праве равни P се добијају деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots, \rho^{16}$ на праве $\ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_{16}$. Из услова

$$\left|\ell_i \cap \ell_1\rho^k\right| = 1, \ \mathrm{i} = 2, 3, \cdots, 16, \ \mathrm{k} = 0, 1, 2, 3, \cdots, 16$$

следи да је

$$\ell_i = \{1_0, 1'_1, 2'_2, 3'_3, \cdots, 16'_{16}\}$$

где су 1’, 2’, 3’, 4’, ..., 16’ (необавезно различити) бројеви скупа $\{2, 3, \cdots, 16\}$.

Сада испитујемо деловање колинеације α на скуп тачака и скуп правих равни P. Како је ред инволуције α паран следи да је инволуција α елација. Из $\rho^\alpha = \rho^{-1}$ следи да је 1_0 центар и права ℓ_1 оса инволуције α. Отуда, инволуција α фиксира 17 правих $\ell_\infty, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_{16}$ и 17 тачака ∞, 1_0, 2_0, $3_0, \cdots, 16_0$. Из $273 = 2 \cdot 128 + 17$ следи да α има 17 орбита тачака дужине 1 (17 фиксних тачака) и 128 орбите тачака дужине 2. Ако орбитарну структуру колинеације α запишемо у скраћеном облику (записујући само индексе 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 16) можемо узети да је

$$\alpha = (0)(1, 16)(2, 15)(3, 14)(4, 13)(5, 12)(6, 11)(7, 10)(8, 9)$$

где (1, 16) означава даје $1\alpha = 16$ из исте орбите тачака, (2, 15) означава да је $2\alpha = 15$ из исте орбите тачака, (3, 14) означава да је $3\alpha = 14$ из исте орбите тачака, ... (8, 9) означава да је $8\alpha = 9$ из исте орбите тачака. Из тврђења

$$\ell_i\alpha = \ell_i, \ \mathrm{i} = 2, 3, \cdots, 16$$

следи да су праве ℓ_i, $\mathrm{i} = 2, 3, \cdots, 16$ типа

$$\ell_i = \{1_0, a_1, a_{16}, b_2, b_{15}, c_3, c_{14}, d_4, d_{13}, e_5, e_{12}, f_6, f_{11}, g_7, g_{10}, h_8, h_9\}$$

где су a, b, c, d, e, f, g, h према паровима различити бројеви скупа {2, 3, $\cdots$, 16}. Можемо узети да је

$$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 2_{16}, 3_2, 3_{15}, 4_3, 4_{14}, 5_4, 5_{13}, 6_5, 6_{12}, 7_6, 7_{11}, 9_8, 9_9\}.$$

Сада се конструишу праве ℓ_i, i = 3, 4, $\cdots$, 16 које су типа

$$\ell_i = \{1_0, a_1, a_{16}, b_2, b_{15}, c_3, c_{14}, d_4, d_{13}, e_5, e_{12}, f_6, f_{11}, g_7, g_{10}, h_8, h_9\}$$

Из тврђења

$$\left|\ell_i \cap \ell_2\rho^k\right| = 1,\ i = 3, 4, \cdots, 16,\ k = 0, 1, 2, \cdots, 16$$

следи да су само четири из бројева a, b, c, d, e, f, g, h из скупа {2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9} а остала четири су из скупа {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 }. Из тврђења

$$\left|\ell_i\rho^s \cap \ell_j\rho^k\right| = 1,\ i \neq j,\ i, j = 3, 4, \cdots, 16,\ k, s = 0, 1, 2, \cdots, 16$$

следи да праве ℓ_i и ℓ_j, i $\neq$ j, имају тачно четири пара заједничка броја a, b, c, d, e, f, g, h. Користећи ово тврђење за праве ℓ_i, i = 3, 4, $\cdots$, 16 добија се следеће јединствено решење за ове праве:

$$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 3_{16}, 4_2, 4_{15}, 7_3, 7_{14}, 8_4, 8_{13}, 11_5, 11_{12}, 12_6, 12_{11}, 14_7, 14_{10}, 15_8, 15_9\}$$
$$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 4_{16}, 5_2, 5_{15}, 8_3, 8_{14}, 9_4, 9_{13}, 12_5, 12_{12}, 13_6, 13_{11}, 14_8, 14_9, 16_7, 16_{10}\}$$
$$\ell_5 = \{1_0, 3_3, 3_{14}, 5_1, 5_{16}, 7_4, 7_{13}, 9_2, 9_{15}, 11_7, 11_{10}, 13_8, 13_9, 15_6, 15_{11}, 16_5, 16_{12}\}$$
$$\ell_6 = \{1_0, 2_4, 2_{13}, 5_3, 5_{14}, 7_2, 7_{15}, 8_1, 8_{16}, 10_8, 10_9, 13_7, 13_{10}, 14_6, 14_{11}, 15_5, 15_{12}\}$$
$$\ell_7 = \{1_0, 2_5, 2_{12}, 3_6, 3_{11}, 8_8, 8_9, 9_7, 9_{10}, 10_1, 10_{16}, 11_2, 11_{15}, 14_3, 14_{14}, 16_4, 16_{13}\}$$
$$\ell_8 = \{1_0, 2_3, 2_{14}, 4_5, 4_{12}, 7_1, 7_{16}, 9_6, 9_{11}, 10_2, 10_{15}, 12_4, 12_{13}, 15_7, 15_{10}, 16_8, 16_9\}$$
$$\vdots$$
$$\ell_{16} = \{1_0, 2_6, 2_{11}, 3_7, 3_{10}, 4_5, 4_{12}, 5_8, 5_9, 10_3, 10_{14}, 11_1, 11_{16}, 12_2, 12_{15}, 13_4, 13_{13}\}$$

Теорема је доказана.

Нека је P = (V, B, $\in$) пројективна раван реда 16 конструисана у горњој теореми. Тежинска пројективна раван P' = (V', B', $\in$), где је V = V', B' = B $\cup$B'' B''= {{A^{17}}: A $\in$V} је комплетна тежинска пројективна раван реда 16. Релација $\tau \subseteq V^{16+1}$ дефинисана са

$$(A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}, A_{16+1}) \in \tau \Leftrightarrow \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}, A_{16+1}\} \in B \text{ or}$$
$$A_1 = A_2 = A_3 \cdots = A_{16} = A_{16+1},$$

Је тотално симетрична (2, 16 – 1) – мултиквазигрупна релација која задовољава услов (A, A, . . . , A) = (A^{16+1})$\in \tau$ for all $A \in V$. Број тачака је $|V| = 16^2 + 16 + 1 = 273$, број блокова је $|B'| = 16^2 + 16 + 1 + 273 = 546$ и $t_A = 17 + 17 = 34$.

ЗАКЉУЧАК

Овај рад презентује резултат добијен деловањем групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P за коју унапред знамо да постоји. Слично, може се испитивати деловање групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P чије је питање егзистенције отворено.

Литература

Beth, T., Jugnickel, D., Lenz, H,: *Design theory,* Manheim,Wien, Zurich, 1985.

Čupona, Ġ., Stojaković, Z., Ušan, J.: *On finite multiquasigroups,* Publ. Inst. Math. (Beograd) 20 (43) 1981, 53-59.

Čupona, Ġ., Stojaković, Z., Ušan, J.: *Multiquasigroups and some related structures,* Prilozi MANU I/1, Skopje, 1980.

Dimovski, D., Mandak, A.: *Incidence structures with n-metrics,* Zb. Rad. Fil. Fak. (Niš) 6 (1992), 151-155.

Dimovski, D., Mandak, A.: *Weighted block designs and Steiner systems,* Novi Sad J. Math. Vol. 29, No.2 (1999), 163-169.

Lenz, H.: *Vorlesungen uber projective geometrije,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.

Mandak, A.: *On weighted block designs,* Proc. The Second Math. Conf. of Republik of Srpska (Trebinje, 2012) 57-63.

Mandak, A.: *Multiquasigroups and weighted projective planes,* Kragujevac J. Math. 30 (2007) 211-219.

Ušan, J.: *<Nn, E>-seti s (n + 1)-rastojaniem,* Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math, 17 (2) (1989), 65-87.

WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF 16th ORDER AND TOTALLY SYMETRICAL (2,16-1)-MULTIQUASI GROUP

Summary: *The paper introduces the notion of weighted projective plane which is generalization of a common projective plane and it is proved that the group Frobenius of order 34 effects projective plane R of order 16 as a group of colineation.By using these effects plane R can be constructed . a weighted projective plane R` order 16 is equivalent to totally symetrical (2-16-1)-multiquasigroup.*

Key words:*Projective plane, group, co lineation, orbit.*