Зборник радова Учитељског факултета, 7, 2013, стр. 201-208
UDK 517.98
ID 203386124

Др Љиљана Р. Пауновић[47]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ТЕОРЕМА О ФИКСНОЈ ТАЧКИ ЗА Т-KANNAN КОНТРАКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА У КОНУСНОМ МЕТРИЧКОМ ПРОСТОРУ

Апстракт: *У раду Моралеса иРојаса (Jose R. Morales and Edixon Rojas, 2010: 175-184), доказана је теорема о фиксној тачки за T-Kannan контрактивно пресликавање у конусном метричком простору уз претпоставку да је конус нормалан. У овом раду доказана је поменута теорема изостављајући претпоставку нормалности конуса, у доказу теореме примењена је само претпоставка да је P солид конус, није коришћена непрекидност вектора метрике d као ни Сендвич теорема.*

Кључне речи: солид конус, конусни метрички простор, T- Kannan контракција.

УВОД

Дефиниција 1: Нека је E реалан Банахов[48] простор. Подскуп P од E назива се *конус* ако је:

1. P затворен, непразан и $P \neq \{\theta\}$;
2. $a,b \in R,\quad a,b \geq 0,\quad$ и $\quad x,y \in P\quad$ следи да је $ax+by \in P$;
3. $P \cap (-P) = \{\theta\}$.

Ако је дат конус $P \subset E$, парцијално уређење $\leq$ у односу на P је дефинисано са $x \leq y$ ако и само ако је $y - x \in P$, док $x << y$ означава да је $y - x \in \operatorname{int} P$ (интери- ор за P).

[47] ljiljana.paunovic@pr.ac.rs
[48] Stefan Banach, 1892-1945, пољски математичар, један од оснивача модерне функционалне анализе. Позната је Банахова теорема о фиксној (непокретној) тачки ; она се често назива Банахов принцип контракције (доказан 1922. године). За овај принцип везује се почетак теорије непокретне тачке у метричким просторима.

Дефиниција 2.: Нека је E реалан Банахов простор, $P \subset E$ конус и $\leq$ парцијално уређење у односу на P. За конус P кажемо да је *нормалан* ако постоји број $K > 0$ тако да за свако $x, y \in P$ важи:

$$\theta \leq x \leq y \quad \text{следи} \quad \|x\| \leq K\|y\|,$$

или еквивалентно, ако $(\forall n) \quad x_n \leq y_n \leq z_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x \quad \text{следи} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Позитиван број K који задовољава услове из дефиниције назива се *нормална константа* за P. Јасно је да је $K \geq 1$. Конус P који није нормалан али задовољава услов $\operatorname{int} P \neq \phi$ (његова унутрашњост је непразан скуп) називамо *солид конус*.

Дефиниција 3.: Нека је X непразан скуп. Претпоставимо да пресликавање
$d : X \times X \to E$ задовољава следеће услове:

1. $\theta \leq d(x,y)$ за све $x, y \in X$ и $d(x,y) = \theta$ ако и само ако $x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ за све $x, y \in X$;
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ за све $x, y, z \in X$.

Онда се d назива *конусна метрика* на X а (X,d) је *конусни метрички простор*.

Дефиниција 4.: Нека је (X,d) конусни метрички простор. За низ (x_n) кажемо да је:

1. *Кошијев низ* ако за свако $c \in E$ са $\theta << c$, постоји N такво да за све $n, m > N$ важи $d(x_n, x_m) << c$;
2. *конвергентан низ* ако за свако $c \in E$ са $\theta << c$, постоји N такво да за свако $n > N$ важи $d(x_n, x) << c$ за неко фиксирано $x \in X$.

За конусни метрички простор X кажемо да је *комплетан* ако је сваки Кошијев[49] низ из X конвергентан у X.

Дефиниција 5.: Нека је (X,d) конусни метрички простор, P солид конус и $T : X \to X$. Онда:

1. за T кажемо да је *непрекидно* ако $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ следи да је $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$, за све $(x_n) \in X$;

[49] Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, француски математичар

2. за T кажемо да је *субсеквенцијално конвергентно*, ако за сваки низ (y_n) је $T(y_n)$ конвергентно, следи да (y_n) има конвергентан подниз ;
3. за T кажемо да је *секвенцијално конвергентно* ако за сваки низ (y_n) ако је $T(y_n)$ конвергентно онда је и (y_n) конвергентно.

Дефиниција 6.: Нека је (X,d) конусни метрички простор и $T, f: X \to X$ два пресликавања. За пресликавање f кажемо да је *T-Hardy-Rogers* контракција, ако постоји $a_i \geq 0$, $i=\overline{1,5}$ са $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ тако да за све $x, y \in X$ важи:

$$\begin{aligned} &d(Tfx, Tfy) \leq a_1 d(Tx, Ty) + a_2 d(Tx, Tfx) + \\ &a_3 d(Ty, Tfy) + a_4 d(Tx, Tfy) + a_5 d(Ty, Tfx) \end{aligned} \tag{1}$$

Ако је $a_1 = a_4 = a_5 = 0$, $a_2 = a_3 \neq 0$ добијамо *T-Kannan* контракцију.

У случајевима када конус не мора бити нормалан стандардне особине метрике замениће мо следећим особинама:

(p_1) ако је $u \leq v$ и $v << \omega$, онда је **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**;

(p_2) ако је $\theta \leq u << c$ за свако $c \in \operatorname{int} P$ онда је $u = \theta$.

(p_3) ако је E реалан Банахов простор са конусом P и ако $a \leq \lambda a$ где је $a \in P$ и $0 \leq \lambda < 1$, онда $a = \theta$.

(p_4) ако је $c \in \operatorname{int} P$, $a_n \in E$ и $a_n \to \theta$, онда постоји n_0 такво да за све $n > n_0$ је

$a_n << c$.

ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ О ФИКСНОЈ ТАЧКИ ЗА T-KANNAN КОНТРАКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА

***Теорема*:** Нека је (X,d) комплетан конусни метрички простор и P солид конус, поред тога нека је $T: X \to X$ један на један, непрекидно пресликавање и $f: X \to X$, *T-Hardy – Rogers* контракција. Онда:

1. за свако $x_0 \in X$ низ $Tf^n x_0$ је Кошијев;
2. постоји $v_{x_0} \in X$ тако да је $\lim_{n\to\infty} Tf^n x_0 = v_{x_0}$;
3. ако је T субсеквенцијално конвергентно, онда $(f^n x_0)$ има конвергентан подниз;
4. постоји јединствено $u_{x_0} \in X$ тако да је $fu_{x_0} = u_{x_0}$;

5. ако је T секвенцијално конвергентно, онда за свако $x_0 \in X$ итеративни низ $(f^n x_0)$ конвергира ка u_{x_0}.

Доказ: Претпоставимо да је $x_0 \in X$ произвољна тачка у X, и дефинишимо итеративни низ (x_n) помоћу $x_{n+1} = fx_n = f^n x_0$. Сада према (1) имамо да је

$$
\begin{aligned}
d(Tx_n, Tx_{n+1}) &= d(Tf^n x_0, Tf^{n+1} x_0) = d(Tff^{n-1} x_0, Tff^n x_0) \\
&\le a_1 d(Tf^{n-1} x_0, Tf^n x_0) + a_2 d(Tf^{n-1} x_0, Tf^n x_0) + a_3 d(Tf^n x_0, Tf^{n+1} x_0) \\
&+ a_4 d(Tf^{n-1} x_0, Tf^{n+1} x_0) + a_5 d(Tf^n x_0, Tf^n x_0).
\end{aligned}
$$

Како је

$$d(Tf^{n-1} x_0, Tf^{n+1} x_0) \le d(Tf^{n-1} x_0, Tf^n x_0) + d(Tf^n x_0, Tf^{n+1} x_0)$$

следи да је

$$(1 - a_3 - a_4) d(Tx_n, Tx_{n+1}) \le (a_1 + a_2 + a_4) d(Tx_{n-1}, Tx_n) \ . \qquad (2)$$

Због симетрије и (1) имамо

$$
\begin{aligned}
d(Tx_{n+1}, Tx_n) &= d(Tf^{n+1} x_0, Tf^n x_0) = d(Tff^n x_0, Tff^{n-1} x_0) \\
&\le a_1 d(Tf^n x_0, Tf^{n-1} x_0) + a_2 d(Tf^n x_0, Tf^{n+1} x_0) + a_3 d(Tf^{n-1} x_0, Tf^n x_0) \\
&+ a_4 d(Tf^n x_0, Tf^n x_0) + a_5 d(Tf^{n-1} x_0, Tf^{n+1} x_0),
\end{aligned}
$$

односно

$$(1 - a_2 - a_5) d(Tx_{n+1}, Tx_n) \le (a_1 + a_3 + a_5) d(Tx_n, Tx_{n-1}). \qquad (3)$$

Узимајући у обзир (2) и (3) добијамо

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}) \le \frac{2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5} d(Tx_{n-1}, Tx_n) = \alpha d(Tx_{n-1}, Tx_n),$$

за све $n = 1,2,3,...$ јер је $\alpha = \dfrac{2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5} \in [0,1)$ где је $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$.

Због тога, за све n,

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}) \le \alpha d(Tx_{n-1}, Tx_n) \le ... \le \alpha^n d(Tx_0, Tx_1) \, . \qquad (4)$$

Сада, за $m > n$,

$$d(Tx_n, Tx_m) \le d(Tx_n, Tx_{n+1}) + d(Tx_{n+1}, Tx_{n+2}) + ... + d(Tx_{m-1}, Tx_m)$$

$$\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1}) d(Tx_0, Tx_1)$$
$$\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(Tx_0, Tx_1) \to \theta$$

за $n \to \infty$.

Из (p_4) следи да је за $\theta << c$ и велико $n: \alpha^n (1-\alpha)^{-1} d(Tx_0, Tx_1) << c$, тако према (p_1) је $d(Tx_n, Tx_m) << c$. Применом *Дефиниције 4.* (1) следи да је $(Tx_n) = (Tf^n x_0)$ Кошијев низ. Како је (X, d) комплетан конусни метрички простор, постоји $v_{x_0} \in X$ тако да је

$$\lim_{n\to\infty} Tf^n x_0 = v_{x_0}. \tag{5}$$

Сада, ако је T субсеквенцијално конвергентно, $(f^n x_0)$ има конвергентан подниз.

Такође, постоји $u_{x_0} \in X$ и (x_{n_i}) тако да је

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i} x_0 = u_{x_0} \tag{6}$$

Како је T непрекидно и помоћу (6) добијамо

$$\lim_{i\to\infty} Tf^{n_i} x_0 = Tu_{x_0}, \tag{7}$$

и помоћу (5) и (7) закључујемо да је

$$Tu_{x_0} = v_{x_0}. \tag{8}$$

С друге стране,

$$d(Tfu_{x_0}, Tu_{x_0}) \leq d(Tfu_{x_0}, Tf^{n_i} x_0) + d(Tf^{n_i} x_0, Tf^{n_i+1} x_0) + d(Tf^{n_i+1} x_0, Tu_{x_0}). \tag{9}$$

Применом (1) имамо

$$\begin{aligned} d(Tfu_{x_0}, Tf^{n_i} x_0) &= d(Tfu_{x_0}, Tff^{n_i-1} x_0) \\ &\leq a_1 d(Tu_{x_0}, Tf^{n_i-1} x_0) + a_2 d(Tu_{x_0}, Tfu_{x_0}) \\ &+ a_3 d(Tf^{n_i-1} x_0, Tf^{n_i} x_0) + a_4 d(Tu_{x_0}, Tf^{n_i} x_0) + a_5 d(Tf^{n_i-1} x_0, Tfu_{x_0}). \end{aligned} \tag{10}$$

Сада из (4), (9) и (10) следи да је

$$d(Tfu_{x_0}, Tu_{x_0}) \leq \frac{a_1 + a_5}{1 - a_2 - a_5} d(Tf^{n_i-1} x_0, Tu_{x_0}) + \frac{a_4}{1 - a_2 - a_5} d(Tf^{n_i} x_0, Tu_{x_0})$$

$$+\frac{a_3\alpha^{-1}+1}{1-a_2-a_5}d(Tx_0,Tx_1)\alpha^{n_i}+\frac{1}{1-a_2-a_5}d(Tf^{n_i+1}x_0,Tu_{x_0})$$
$$=A_1d(Tf^{n_i-1}x_0,Tu_{x_0})+A_2d(Tf^{n_i}x_0,Tu_{x_0})+A_3\alpha^{n_i}+A_4d(Tf^{n_i+1}x_0,Tu_{x_0}).$$

Нека је $\theta \ll c$ дато, како $\alpha^{n_i}\to\theta$ и $Tf^{n_i}x_0\to Tu_{x_0}$ за $i\to\infty$ избором природног броја k тако да за све $i\geq k$ имамо

$$d(Tf^{n_i-1}x_0,Tu_{x_0})\ll\frac{c}{4A_1},\qquad d(Tf^{n_i}x_0,Tu_{x_0},Tu_{x_0})\ll\frac{c}{4A_2},$$
$$\alpha^{n_i}\ll\frac{c}{4A_3}\qquad \text{и}\qquad d(Tf^{n_i+1}x_0,Tu_{x_0})\ll\frac{c}{4A_4}.$$

Тако добијамо $d(Tfu_{x_0},Tu_{x_0})\ll\frac{c}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{4}=c.$

Због тога, $d(Tfu_{x_0},Tu_{x_0})\ll c$ за све $c\in \operatorname{int}P.$ Применом (p_2) следи да је $d(Tfu_{x_0},Tu_{x_0})=\theta,$ одакле следи $Tfu_{x_0}=Tu_{x_0}$. Како је T пресликавање један на један, онда $fu_{x_0}=u_{x_0}$, што значи да f има фиксну тачку. Како је f, T - Hardy-Rogers контракција имамо

$$d(Tfu_{x_0},Tf\omega)\leq a_1d(Tu_{x_0},T\omega)+a_2d(Tu_{x_0},Tf\omega)+a_3d(T\omega,Tf\omega)$$
$$+a_4d(Tu_{x_0},Tf\omega)+a_5d(T\omega,Tfu_{x_0}).$$

Ако је ω друга фиксна тачка за f, онда из ињективности за T имамо $fu_{x_0}=f\omega,$ фиксна тачка је јединствена. На крају, ако је T секвенцијално конвергентно, заменом n са n_i закључујемо да је

$$\lim_{n\to\infty}f^nx_0=u_{x_0}.$$

Ово показује да (f^nx_0) конвергира фиксној тачки функције f.

ЗАКЉУЧАК

Убрзо после објављивања рада Моралеса иРојаса појавио се велики број чланака који се баве овом и сличном проблематиком. Резултати су фокусирани на фиксне тачке једног или два пресликавања у конусном простору. Применом неких старих и познатих резултата за конусе у Банаховим просторима, многи резултати се могу свести на одговарајуће резултате у метричким просторима. Другим речима, проблем фиксне тачке у конусним метричким просторима одговара случају када је конус не-нормалан (non-normal) али са непразном унутрашњошћу. Важно је напоменути да се добро познат Банахов Принцип Контракције (доказан 1922. године) не може применити када је у питању не-нормалан конус, међутим постоје примери који показују да постоји Банахов тип контрактивних пресликавања у не-нормалном солид конусном метричком простору.

Литература

Аљанчић, С. (1968): *Увод у реалну и функционалну анализу,* Грађевинска књига, Београд.

Djukić, D., Paunović, Lj., Radenović, S. (2011): *Convergence of iterates with error of Uniformly quasi - Lipschitzian mappings in cone metric spaces,* Kragujevac J.Math., 35, 399-410.

Filipović, M., Paunović, Lj., Radenović S., Rajović, M. (2011): *Remarks on Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of T-Kannan Contractive Mappings,* Math. And Computer Modeling, 54, 1467-1472.

Fadail, Z. M., Ahmad, A. G. B., and Paunović, Lj. (2012): *New Fixed Point Results of Single-Valued Mapping for c-Distance in Cone Metric Spaces,* Abstract and Applied Analysis, 12 pages.

Huang, L. G., Yhang, X. (2007): *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mapings,* J. Math. Anal. Appl., 332, 1468-1476.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. (2011): *A note on equivalence of some metric and cone metric fixed point results,* Applied Math. Letters, 370-374.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. (2009): *Quasi-contraction on a cone metricspace,* Appl. Math. Letters, 1674-1679.

Kantorovich, L. V. (1939): *The method of successive approximations for functional equations,* Acta Math.,71, 63-77.

Morales, J. R., Rojas, E. (2010): *Cone metric spaces and fixed point theorems of T-Kannan contractive mappings,* Int. J. Math. Anal. 4 (4), 175-184.

Paunović, Lj. (2011): *Teoreme o fiksnoj tački u pridruženom simetričnom prostoru datom konusnom metričkom prostoru,* Zbornik radova Učiteljskog fakulteta u Prizrenu-Leposaviću, 165-172.

Radojević, S., Paunović, Lj., Radenović, S. (2011): *Abstract metric spaces and Hardy-Rogers-type theorems,* Applied Math. Letters, 553-558.

Ракочевић, В. (1994): *Функционална анализа,* Научна књига, Београд.

Ljiljana R. Paunovic, Ph.D.
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

THEOREM ON FIXED POINT FOR T-KANNAN CONTRACTIVE REFLECTION IN THE CONE METRIC SPACE

Summary: *In the work of Jose R.Morales and Edixon Rojas, 2010: 175-184 a theorem on fixed point for T-Kannan contractive reflection in th3e cone metric space with an assumption that the cone is normal is being proved. In the paper, the mentioned theorem is proved leaving out assumption of cone normality, in theorem proof only assumption that P is solid cone is applied, continuity of metric vector d was not used neither was the Sandwich theorem.*

Key words: solid cone, cone metric space, T-Kannan contraction.