ТРЕЋИ ДЕО

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Проф. др Алија Мандак[19]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ЈЕДНА КОНСТРУКЦИЈА ПОЉА РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Апстракт. *У раду се, полазећи од интегралног домена целих бројева конструише поље рационалних бројева као поље разломака домена целих бројева. Доказује се да је конструисано поље разломака најмање поље које садржи интегрални домен целих бројева. Овај домен се изоморфно потапа у своје поље разломака тако да се са апстрактне тачке гледишта сваки цео број идентификује са разломком чији је именилац један.*

Кључне речи: број, скуп, пресликавање, инјекција, хомоморфизам, изоморфно потапање, интегрални домен, поље.

1. ИНТЕГРАЛНИ ДОМЕН ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

Адитивни групоид $(N,+)$ скупа природних бројева је комутативна полугрупа али без неутралног елемента. Да би та полугрупа била са неутралним елементом скуп N се проширује тако што му додајемо нулу (0) која има следећу особину:

$$x+0=0+x=x,(\forall x \in N).$$

Дакле, 0 је неутрални елемент за сабирање у скупу $N_0=N \cup \{0\}$. Структура $(N_0,+)$ је комутативна полугрупа са неутралним елементом 0. У овој полугрупи нема сваки број супротни. Да бисмо ово постигли сваком природном броју $n \in N$ придружујемо њему супротан $-n$ са особином

$$n+(-n)=(-n)+n=0.$$

Тако се добија скуп Z свих целих бројева који садржи све природне бројеве (позитивне целе), нулу и све негативне целе бројеве.

---

[19] alija.mandak@pr.ac.rs

$$Z = N \cup \{0\} \cup (-N), \quad N = \{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\},$$
$$-N = \{-n \mid n \in N\} = \{-1,-2,-3,\cdots,-n,-(n+1),\cdots\}.$$

У скупу Z се дефинишу операције сабирање и множење целих бројева тако да су оне сагласне са истим операцијама дефинисаним у скупу N свих природних бројева. Ово значи да ако цели бројеви $m,n \in N$ онда збир $n+m$ и производ $n \cdot m$ се дефинишу исто као у скупу N.

1.1. Теорема. Структура $(Z,+,\cdot)$ тј. скуп Z свих целих бројева са операцијама сабирање (+) и множење ($\cdot$) је асоцијативни и комутативни прстен са јединицом без делитеља нуле (тј. интегрални домен).

1.2. Дефиниција. Структура $(Z,+,\cdot)$ зове се **интегрални домен целих бројева**.

2. ПОЉЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Дајемо дефиницију количника два цела броја и објашњење да за било која два цела броја њихов количник не мора постојати.

2.1. Дефиниција. Количник два цела броја $a,b \in Z$ (ако постоји) је цео број $c \in Z$ такав да је

$$c \cdot b = a.$$

Објаснимо да, на пример, количник бројева 5 и 3 не постији. Прво, количник не може бити негативан јер је производ негативног броја и броја 3 негативан па не може бити 5. Даље, количник не може бити 0, 1, 2, и 3 што се проверава непосредним множењем ових бројева са 3. На крају, количник C не може бити већи од 3 јер ако је $c > 3$, онда $c \cdot 3 > 3 \cdot 3$, тј. $c \cdot 3 > 9$, тј. не може бити 5.

Исто тако, количник целог броја $a \neq 0$ и броја 0 не постоји. Заиста, ако количник C постоји онда је $c \cdot 0 = a$ што није могуће јер је по дефиницији множења у скупу Z $c \cdot 0 = 0$ за сваки $c \in Z$. Због ове особине каже се да дељење нулом није могуће.

По дефиницији множења у скупу Z је $c \cdot 0 = 0$ за сваки $c \in Z$. Ово значи да је количник $0 : 0$ било који цео број $c \in Z$ тј. није једнозначно одређен. Због ове особине каже се да дељење 0 са 0 није једнозначно одређено.

Ако количник два цела броја $a,b \in Z$ постоји онда се каже да је **број a дељив бројем b** или **b је фактор у a**.

Да би операција дељење са бројевима различитим од 0 била потпуно дефинисана скуп Z проширујемо тако што му додајемо све разломке $\frac{p}{q}$ где су $p,q \neq 0$ узајамно прости цели бројеви.

2.2. Дефиниција. Рационални бројеви су парови узајамно простих целих бројева p,q, где је $p \neq 0$, записаних у виду $\dfrac{p}{q}$ (црта замењује знак операције дељење).

Ако су рационални бројеви дати као парови узајамно простих целих бројева онда једнакост рационалних бројева се дефинише овако:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \quad pq = rs .$$

У случају $q = 1$ однос $\dfrac{p}{1}$ дефинише цео број p представљен количником дељења броја q са 1. Дакле цели бројеви су специјални случајеви рационалних бројева. Ако је $q \neq 1$ и p,q узајамно прости онда у скупу Z свих целих бројева p није дељиво са q, и однос $\dfrac{p}{q}$ раније није био дефинисан. Отуда овакви рационални бројеви нису цели.

Скуп свих рационалних бројева означава се са Q. Из претходног разматрања следи да је

$$N \subset Z \subset Q.$$

У скупу Q се дефинишу операције сабирање и множење рационалних бројева тако да су оне сагласне са истим операцијама дефинисаним у скупу Z свих целих бројева. Ово значи да ако цели бројеви $p,q \in Z$ онда збир $p+q$ и производ $p \cdot q$ се дефинишу исто као у скупу Z.

2.3. Теорема. Структура $(Q,+,\cdot)$ тј. скуп Q свих рационалних бројева са операцијама сабирање (+) и множење (·) је поље.

2.4. Дефиниција. Структура $(Q,+,\cdot)$ зове се **поље рационалних бројева.**

3. КОНСТРУКЦИЈА ПОЉА РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Полазимо из изграђеног интегралног домена Z. На скупу

$$S = \{(a,b) : a \in Z, b \in Z \setminus \{0\}\}$$

дефинишимо релацију ~ на следећи начин:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc .$$

Проверимо да је ~ релација еквиваленције на скупу S. Очигледно да је ~ рефлексивна и симетрична релација. Проверимо транзитивност. Нека је $(a,b) \sim (c,d) \sim (e,f)$. Тада је $ad = bc$ и $cf = de$. Одавде се добија $adf = bcf = bde$ и даље (јер d није делилац нуле) $af = be$; ово и значи $(a,b) \sim (e,f)$. Нека K означава фактор – скуп $S/\sim$ и нека је $[a,b]$ класа еквиваленције елемента $(a,b) \in S$, тј.

$$[a,b] = \{(x,y) \mid (x,y) \in S, (a,b) \sim (x,y)\}.$$

У скупу *К* дефинишимо операције + (сабирање) и · (множење) на следећи начин:

$$[a,b]+[c,d]=[ad+bc,bd]; \qquad [a,b]\cdot[c,d]=[ac,bd].$$

Операције су добро дефинисане, тј. не зависе од избора представника у класама (већ од самих класа). Проверимо прво да је сабирање добро дефинисано. Нека је $[a,b]=[a_1,b_1],[c,d]=[c_1,d_1]$, тј. нека је $ab_1=a_1b$ и $cd_1=c_1d$. Тада је, дакле,

$$ab_1dd_1=a_1bdd_1, cd_1bb_1=c_1dbb_1$$

и даље

$$ab_1dd_1+cd_1bb_1=a_1bdd_1+c_1dbb_1.$$

Уважавајући ове једнакости сада се лако проверава да је

$$[a,b]+[c,d]=[a_1,b_1]+[c_1,d_1].$$

Множење је добро дефинисано. Заиста, нека је $[a,b]=[a_1,b_1],[c,d]=[c_1,d_1]$, тј. нека је $ab_1=a_1b$ и $cd_1=c_1d$. Тада је, дакле,

$$ab_1cd_1=a_1bdc_1.$$

Уважавајући ове једнакости сада се лако проверава да је

$$[a,b]+[c,d]=[a_1,b_1]+[c_1,d_1].$$

Даље се лако утврђује да је K поље. Класа $[0,b], b\neq 0$, је нула $[c,c], c\neq 0$ је јединица у K; супротан елемент за $[a,b]\in K$ је $[-a,b]$, а за $[c,d], c\neq 0$, инверзни елемент је $[d,c]$.

Покажимо да је *К* проширење од Z, тачније да се Z може изоморфно потопити у поље *К*. Ради тога посматрамо пресликавање

$$\varphi : Z\rightarrow K, \qquad \varphi(a)=[a,1], a\in Z.$$

Како је $(a,1)\sim(a_1,1)\Leftrightarrow a=a_1$ следи да је φ инјекција. φ је хомоморфизам (тиме и мономорфизам) јер за произвољне $a,b\in Z$ важи

$$\varphi(a+b)=[a+b,1]=[a,1]+[b,1]=\varphi(a)+\varphi(b),$$

$$\varphi(ab)=[ab,1]=[a,1]\cdot[b,1]=\varphi(a)\cdot\varphi(b).$$

Дакле, $a\in Z$ може се идентификовати са класом $[a,1]\in K$.

3.1. Дефиниција. Поље *К* конструисано у претходном примеру назива се ***поље разломака интегралног домена*** Z целих бројева. Управо то поље K је ***поље рационалних бројева*** Q.

Претходно се сада може исказати у облику теореме.

3.2. Теорема. За интегрални домен Z целих бројева постоји поље рационалних бројева Q које га садржи.

Докажимо сада да је поље Q разломака интегралног домена Z целих бројева најмање поље које садржи Z у смислу да ако је *L* произвољно поље које садржи Z, тада пресек $\overline{K}$ свих подпоља од *L* која садрже Z јесте подпоље од *L* изоморфно пољу разломака Q.

Како поље $\overline{K}$ садржи Z, то за сваки $a,b \in Z$, постоји $r \in \overline{K}$ који је решење једначине $ax = a$. Нека је $r = ab^{-1}$. Предпоставимо да је r такође решење једначине $b_1 y = a_1$. Тада имамо $b_1 ab = a_1$, тј. $a_1 b = b_1 a$. Јасно, обрат такође важи, односно

$$ab_1 = a_1 b \Leftrightarrow ab^{-1} = a_1 b_1^{-1}.$$

Дефинишимо пресликавање

$$f : Z \times (Z \setminus \{0\}) \to \overline{K}, \qquad f(a,b) = ab^{-1}.$$

Ако је $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ у смислу претходно разматране еквиваленције, онда је $ab_1 = b_1 a \Leftrightarrow ab^{-1} = a_1 b_1^{-1}$, па је $f(a,b) = f(a_1,b_1)$. Тако f индукује пресликавање $\overline{f} : Q \to \overline{K}$ дефинисано са

$$\overline{f}([a,b]) = f([a,b]) = ab^{-1}.$$

Очигледно, $\overline{f}$ је инјекција. Али $\overline{f}$ је и хомоморфизам. Заиста за $[a,b],[c,d] \in Q$ је

$$\overline{f}([a,b]) + \overline{f}([c,d]) = ab^{-1} + cd^{-1} = add^{-1}b^{-1} + cbb^{-1}d^{-1}$$

И слично

$$\overline{f}([a,b]) \cdot \overline{f}([c,d]) = ab^{-1}cd^{-1} = ac(bd)^{-1} = f(ac,bd) = f((a,b)\cdot(c,d))$$
$$= \overline{f}([a,b]) \cdot \overline{f}([c,d]) = ab^{-1}cd^{-1} = ac(bd)^{-1} = f(ac,bd) = \overline{f}([a,b]) \cdot \overline{f}([b,d]).$$

Слика $\overline{f}(Q)$ је подпоље од Q и садржи Z, па како је $\overline{K}$ најмање поље са том особином, следи $\overline{f}(Q) \equiv \overline{K}$.

Дакле доказана је следећа теорема.

3.1. Теорема. Ако је Z интегрални домен целих бројева, тада свако поље K које садржи Z садржи и најмање подпоље које садржи Z. То потпоље је изоморфно пољу разломака Q интегралног домена Z целих бројева.

Класа $[a,b]$ означава се разломком $\dfrac{a}{b}, b \neq 0.$ Интегрални домен Z целих бројева се изоморфно потапа у Q пресликавањем $a \to \dfrac{a}{1}$. Сваки цео број a идентификује се са разломком $\dfrac{a}{1}$. Сваки рационалан број $x \in Q$ је облика $x = \dfrac{a}{b}, a,b \in Z, b \neq 0.$

4. ЗАКЉУЧАК

Полазећи од интегралног домена $\boldsymbol{Z}$ целих бројева конструисали смо поље рационалних бројева $\boldsymbol{Q}$ као поље разломака домена $\boldsymbol{Z}$. Уместо домена $\boldsymbol{Z}$ може се посматрати произвољан домен $\boldsymbol{R}$ и на сличан начин се конструише поље разломака $\boldsymbol{K}$ произвољног домена $\boldsymbol{R}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Белоусов, В. Д. (1971):** *Алгебраические сети и квазигрупры*, Кишинёв.
2. **Чупона, Г. Трпеновски, Б. (1973)**: *Предавања по алгебра II,* Универзитет во Скопје, Скопје.
3. **Ляпин, Е. С. Евсеев, А. Б. (1974):** *Алгебра и теория чисел,* Просвешение, Москва.
4. **Kočinac, Lj. Mandak, A. (1996):** *Algebra II,* Univerzitet u Prištini, Priština.
5. **Kurepa, S. (1971):** *Uvod u matematiku,* Tehnička knjiga, Zagreb.
6. **Mandak, A. (2005):** *Osnovi nastave matematike sa zbirkom zadataka,* Učiteljski fakultet u Prizrenu-Leposavić, Leposavić.
7. **Mijajlović, Ž. (1993)**: *Algebra 1,* MILGOR, Beograd, Moskva.

Alija Mandak, Ph.D., Associate Professor

Teachers' Training Faculty in Prizren - Leposavić

A CONSTRUCTION OF THE RATIONAL NUMBERS FIELD

Summary: *Having started from the integral domain of integers a field of rational numbers is constructed as a field of fractions of the inteğes domain. It is proved that the constructed field of fractions is the smallest field which contains integral domain of integers. This domain is isomorph embodied into its field of fractions, thus from an abstract point of view each integer is identified with fraction whose demonitor is one.*

Key words: number, set, injection, homeomorphism, isomorphism, integral domain, field.