Зборник радова Учитељског факултета, 8, 2014, стр. 177-184
UDK: 515.126.2
ID: 209915660

Доц. др Љиљана Пауновић[29]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

КОНВЕРГЕНЦИЈА ИТЕРАЦИЈА СА ГРЕШКОМ ЗА УНИФОРМНА КВАЗИ - LIPSHICOVA ПРЕСЛИКАВАЊА У КОНУСНИМ МЕТРИЧКИМ ПРОСТОРИМА

Апстракт: *Takahashi први уводи појам конвексног метричког простора 1970. године. Треба истаћи да је сваки линеарни нормирани простор посебан пример конвексног метричког простора, али постоје неки конвексни метрички простори који не могу бити уграђени у нормиран простор. У последњих неколико година асимптотски нееспанзивна пресликавања и асимптотски квази-нееспанзивна пресликавања проучавана су екстензивно у оквиру конвексног метричког простора. У овом раду посматран је Ishikawa тип итеративног процеса за приближно одређивање фиксне тачке за два равномерна квази-Lipshicova пресликавања у конусном метричком простору. Неки резултати о фиксној тачки за ова пресликавања за комплетне генерализоване конвексне метричке просторе проширени су на конусне метричке просторе.*

Кључне речи: *конвексни метрички простори, Ishikawa тип итеративног процеса, асимптотски нееспанзивно пресликавање, асимптотски квази-нееспанзивно и униформно квази-Lipshicovo пресликавање*

УВОД

Нека је (X, d) конусни метрички простор са солид конусом P. Пресликавање $f: X \to X$ зовемо *асимптотски нееспанзивно* ако постоји $k_n \in [1, +\infty)$, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, тако да важи

$$d\left(f^n x, f^n y\right) \leq k_n d(x, y) \text{ за све } x, y \in X.$$

Нека је $F(f) = \{x \in X : fx = x\}$. Ако $F(f) \neq \phi$, онда f зовемо *асимптотски квази-нееспанзивно* ако постоји $k_n \in [1, +\infty)$, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, тако да $d\left(f^n x, p\right) \leq k_n d(x, p)$ за све $x \in X$, $p \in F(f)$.

[29] ljiljana.paunovic@pr.ac.rs

Ако постоји $L > 0$ тако да је $d\left(f^n x, p\right) \leq Ld(x, p)$ за све $x \in X, p \in F(f)$ тада имамо *униформно квази-Lipshicovo* пресликавање.[30] Из наведених дефиниција, ако је $F(f) \neq \phi$ следи да асимптотски нееxспанзивно пресликавање може бити асимптотски квази-неекспанзивно, а асимптотски квази-неекспанзивно је униформно квази-Lipshicovo где је $L = \sup\{k_n, n = 1,2,...\} < \infty.$

Дефиниција 1. Нека је (X, d) конусни метрички простор и $I = [0,1]$. За пресликавање $W : X^2 \times I \to X$ кажемо да је *конвексна структура на X,* ако за било које $(x, y, \lambda) \in X^2 \times I$ и $u \in X$, важи следећа неједначина:

$$d(W(x, y, \lambda), u) \leq \lambda d(x, u) + (1 - \lambda) d(y, u).$$

Ако је (X, d) конусни метрички простор са конвексном структуром W, онда се (X, d) зове *конвексан абстрактан метрички простор* или конвексан конусни метрички простор. Штавише, непразан подскуп C од X кажемо да је конвексан ако $W(x, y, \lambda) \in C,$ за све $(x, y, \lambda) \in C^2 \times I.$

Дефиниција 2. Нека је (X, d) конусни метрички простор, $I = [0,1]$ и $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ реални низови у $[0,1]$ са особином да је $a_n + b_n + c_n = 1$. За пресликавање $W : X^3 \times I^3 \to X$ кажемо да је конвексна структура на X ако за било које $(x, y, z, a_n, b_n, c_n) \in X^3 \times I^3$ и $u \in X$, важи следећа неједнакост:

$$d(W(x, y, z, a_n, b_n, c_n), u) \leq a_n d(x, u) + b_n d(y, u) + c_n d(z, u).$$

Ако је (X, d) конусни метрички простор са конвексном структуром W, онда се (X, d) зове *уопштен конвексан конусни метрички простор.* Штавише, непразан подскуп C од X кажемо да је конвексан ако $W(x, y, z, a_n, b_n, c_n) \in C,$ за све $(x, y, z, a_n, b_n, c_n) \in C^3 \times I^3$.

Дефиниција 3. Нека је (X, d) конусни метрички простор са конвексном структуром $W : X^3 \times I^3 \to X$, пресликавања $f, g : X \to X$ су униформно квази-Lipshicova прес- ликавања са $L > 0$ и $L^{'} > 0$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a^{'}_n\}$, $\{b^{'}_n\}$, $\{c^{'}_n\}$ је шест низова у $[0,1]$ са особином да је $a_n + b_n + c_n = a^{'}_n + b^{'}_n + c^{'}_n = 1$, $n = 1,2,...$ За било које дато $x_1 \in X$, дефинисати низ $\{x_n\}$ као што следи:

$$\begin{aligned} y_n &= W\left(x_n, g^n x_n, v_n, a^{'}_n, b^{'}_n, c^{'}_n\right) \qquad (1)\\ x_{n+1} &= W\left(x_n, f^n y_n, u_n, a_n, b_n, c_n\right) \end{aligned}$$

[30] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) немачки математичар

где су $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ два низа у X која испуњавају следеће услове:
за неке ненегативне целе бројеве n, m такве да је $1 \leq n < m,$ ако је $\delta(Anm) > 0$ онда

$$\max_{n \leq i, j \leq m} \{\|d(x,y)\| : x \in \{u_i, v_i\}, y \in \{x_j, y_j, fy_j, gx_j, u_j, v_j\}\} < \delta(Anm) \qquad (2)$$

где је $Anm = \{x_i, y_i, fy_i, gx_i, u_i, v_i : n \leq i \leq m\}, \qquad \delta(Anm) = \sup\limits_{x,y \in Anm} \|d(x,y)\|.$

Онда $\{x_n\}$ називамо *Ishikawa тип итеративног процеса* са грешкама два униформна квази-Lipshicova пресликавања f и g у конвексном конусном метричком простору (X, d).

РЕЗУЛТАТИ

Лема 1. Нека ненегативни низови $\{p_n\}, \{q_n\}, \{r_n\}$ задовољавају

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty, \qquad p_{n+1} \leq (1+q_n)p_n + r_n, \qquad n \geq 1.$$

Имамо:

(i) постоји $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$

(ii) ако $\liminf\limits_{n \to \infty} p_n = 0$ онда $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = 0.$

Teorema 1. Нека је C непразан затворен конвексан подскуп комплетног конвексног конусног метричког простора X, где су пресликавања $f, g : C \to C$ униформно квази-Lipshicova пресликавања са $L > 0$ и $L^{'} > 0$, и $F = F(f) \cap F(g) \neq \phi.$ Претпоставимо да је $\{x_n\}$ Ishikawa тип итеративног процеса са грешкама дефинисаним са (1), $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ задовољавају (2) и нека су $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{a^{'}{}_n\}, \{b^{'}{}_n\}, \{c^{'}{}_n\}$ шест низова у $[0,1]$ који задовољавају следеће

$$a_n + b_n + c_n = a^{'}{}_n + b^{'}{}_n + c^{'}{}_n = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) < \infty.$$

Онда, $\{x_n\}$ конвергира заједничкој фиксној тачки за f и g ако и само ако

$$\liminf_{n \to \infty} \|d(x_n, F)\| = 0, \quad \text{где је} \quad \|d(x, F)\| = \inf \{\|d(x, p)\| : p \in F\}.$$

Да бисмо доказали Теорему 1. потребно је дефинисати следећу Лему.

Лема 2. Нека је C непразан затворен конвексан подскуп комплетног конвексног конусног метричког простора X, где су пресликавања $f, g : C \to C$ униформно квази-Lipshicova пресликавања са $L > 0$ и $L^{'} > 0$. Ако је низ $\{x_n\}$ као у (1), $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ задовољавају (2) и нека су $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a^{'}{}_n\}$, $\{b^{'}{}_n\}$, $\{c^{'}{}_n\}$ шест низова у $[0,1]$ који задовољавају следеће

$$a_n + b_n + c_n = a^{'}{}_n + b^{'}{}_n + c^{'}{}_n = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) < \infty,$$

и ако $F = F(f) \cap F(g) \neq \phi,$ онда:

(i) постоји константан вектор $v \in P \setminus \{\theta\}$ тако да

$$\|d(x_{n+1}, p)\| \leq M \cdot \left(1 + \alpha_n L + \alpha_n LL^{'}\right) \cdot \|d(x_n, p)\| + M \cdot \|v\| \cdot \alpha_n,$$

за све $n \in N,$ и за све $p \in F,$ где је M нормална константа конуса $P.$

(ii) постоји реална константа $K > 0$ тако да

$$\|d(x_{n+m}, p)\| \leq KM \cdot \|d(x_n, p)\| + KM \cdot \|v\| \cdot \sum_{k=n}^{n+m-1} \alpha_k,$$

за све $n, m \in N,$ и за све $p \in F,$ где је M нормална константа конуса $P.$

Доказ ове Леме може се наћи у раду (Ђукић, Пауновић, Раденовић 2011: 399 - 410).

Доказ Теореме 1. Неопходност услова је очигледна, тако да ћемо показати само довољност. Из Леме 2. имамо

$$\|d(x_{n+1}, p)\| \leq M \cdot \left(1 + \alpha_n L + \alpha_n LL^{'}\right) \cdot \|d(x_n, p)\| + M \cdot \|v\| \cdot \alpha_n.$$

Како $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty,$ због тога $\lim_{n \to \infty} \|d(x_n, F)\|$ постоји на основу Леме 1. На основу претпоставке, $\liminf_{n \to \infty} \|d(x_n, F)\| = 0,$ добијамо $\lim_{n \to \infty} \|d(x_n, F)\| = 0.$ Сада, докажимо да је $\{x_n\}$

Кошијев низ. Нека је дато $\varepsilon > 0.$ Постоји цео број n_0 тако да за све $n > n_0$ имамо

$$\|d(x_n, F)\| < \frac{\varepsilon}{4KM^2} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \alpha_n < \frac{\varepsilon}{4K\|v\|M^2}.$$

Посебно, постоји $p_1 \in F$ и цео број $n_1 > n_0$ тако да

$$\|d(x_{n_1}, p_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{4KM^2}.$$

Ово следи из Леме 2. (ii) када је $n > n_1$ имамо

$$\left\|d\left(x_{n+m}, p_1\right)\right\| = \left\|d\left(x_{n_1+(n+m-n_1)}, p_1\right)\right\| \le K \cdot M \cdot \left\|d\left(x_{n_1}, p_1\right)\right\| + K \cdot M \cdot \|v\| \cdot \sum_{k=n_1}^{n+m-1} \alpha_n \tag{3}$$

и

$$\left\|d\left(x_n, p_1\right)\right\| = \left\|d\left(x_{n_1+(n-n_1)}, p_1\right)\right\| \le K \cdot M \cdot \left\|d\left(x_{n_1}, p_1\right)\right\| + K \cdot M \cdot \|v\| \cdot \sum_{k=n_1}^{n-1} \alpha_n \tag{4}$$

Због тога из (3) и (4) добијамо да је

$$\begin{aligned}
\left\|d\left(x_{n+m}, x_n\right)\right\| &\le M \cdot \left\|d\left(x_{n+m}, p_1\right) + d\left(p_1, x_n\right)\right\| \\
&\le M \cdot \left\|d(x_{n+m}, p_1\right\| + M \cdot \left\|d(p_1, x_n)\right\| \\
&\le 2K \cdot M^2 \cdot \left\|d(x_{n_1}, p_1)\right\| + K \cdot \|v\| \cdot M^2 \cdot \left(\sum\nolimits_{k=n_1}^{n+m-1} \alpha_k + \sum\nolimits_{k=n_1}^{n-1} \alpha_k\right) \\
&\le 2K \cdot M^2 \cdot \left\|d(x_{n_1}, p_1)\right\| + 2K \cdot \|v\| \cdot M^2 \cdot \sum\nolimits_{k=n_1}^{n+m-1} \alpha_k \\
&\le 2K \cdot M^2 \cdot \frac{\varepsilon}{4KM^2} + 2K \cdot \|v\| \cdot M^2 \cdot \frac{\varepsilon}{4K\|v\|M^2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ово значи да је $\{x_n\}$ Кошијев низ у затвореном конвексном подскупу комплетног конусног метричког простора. Због тога, он конвергира тачки у C. Претпоставимо да је $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Доказаћемо да је $p \in F$. За дато $\varepsilon > 0$, постоји цео број n_2 такав да за све $n \ge n_2$,

$$\left\|d(x_n, p)\right\| < \frac{\varepsilon}{2M\left(1 + L + L'\right)} \text{ и } \left\|d(x_n, F)\right\| < \frac{\varepsilon}{2M\left(1 + 3\left(L + L'\right)\right)}. \tag{5}$$

Постоји $p_2 \in F$ и цео број $n_3 > n_2$ тако да је

$$\left\|d(x_{n_3}, p_2)\right\| < \frac{\varepsilon}{2M\left(1 + 3\left(L + L'\right)\right)}. \tag{6}$$

Прво имамо,

$$\begin{aligned}
& d(fp, p) \le d(fp, p_2) + d(p_2, x_{n_3}) + d(x_{n_3}, p) + 2d(fx_{n_3}, p_2) \\
& \le Ld(p, p_2) + d(x_{n_3}, p_2) + d(x_{n_3}, p) + 2Ld(x_{n_3}, p_2) \\
& \le Ld(p, x_{n_3}) + Ld(x_{n_3}, p_2) + d(x_{n_3}, p_2) + d(x_{n_3}, p) + 2Ld(x_{n_3}, p_2) \\
& = \left(1 + L\right)d(x_{n_3}, p) + \left(1 + 3L\right)d(x_{n_3}, p_2).
\end{aligned}$$

Сада, применом (5) и (6) добијамо

$$\left\|d(fp, p)\right\| \le M\left(1 + L\right)\left\|d(x_{n_3}, p)\right\| + M\left(1 + 3L\right)\left\|d(x_{n_3}, p_2)\right\|$$

$$< M(1+L)\frac{\varepsilon}{2M(1+L+L^{'})} + M(1+3L)\frac{\varepsilon}{2M(1+3(L+L^{'}))} < \varepsilon,$$

такође имамо $\|d(gp,p)\| < \varepsilon$. Како је ε произвољно, следи да је $d(fp,p) = d(gp,p) = \theta,$

значи p је фиксна тачка за f и g.

ЗАКЉУЧАК

У раду (Ђукић, Пауновић, Раденовић 2011: 399-410) доказана је и теорема о егзистенцији заједничке фиксне тачке за пар асимптотски квази-неекспанзивних пресликавања, такође доказана је и теорема о егзистенцији заједничке фиксне тачке за пар асимптотски неекспанзивних пресликавања. Докази ових теорема се могу наћи у поменутом раду, њихово доказивање се своди на доказ Теореме 1.

У Теореми 1. заменом $E = R,\quad P = [0,\infty),\quad d(x,y) = |x-y|,\quad x,y \in R$ добијамо Лему и Теореме из (Wang, Liu 2009: 2067-2071). Такође, добијамо резултате из (Bose 1978: 151-156), као и Теореме из (Wang, Zhu, Damjanović, Hu, 2009: 1522-1525).

Вредно је спомена да према нашој Теореми 1. услови $F(S) \cap F(T) \neq \phi$ у Теореми из (Wang, Zhu, Damjanović, Hu, 2009, 1522-1525) као и у Теореми из (Wang, Li, Zhu, 2010) су сувишни.

Резултати овог рада излазе из оквира конусне псеудометрике, конусно униформних и конусно локално конвексних простора. Такође, сви резултати излазе из оквира конвексних конусно метричких простора.

Литература

Abas, M., Jungck, G. (2008), *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces,* J. Math. Anal. Appl. 341, 416-420.

Altun, I., Durmaz, G. (2009), *Some fixed point theorems on ordered cone metric spaces,* Rend. Circolo Mat. Palermo, 58, 319-325.

Altun, I., Rakočević, V. (2010), *Ordered cone metric spaces and fixed point results,* Comput. Math. Appl. 60, 1145-1151.

Bose, S. C. (1978), *Common fixed points of mappings in a uniformly convex Banach space,* Journal of the London Mathematical Society, 151-156.

Djukić, D., Paunović, Lj., Radenović, S. (2011), *Convergence of iterates with error of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in cone metric spaces,* Kragujevac J. Math. 35, 399-410.

Filipović, M., Paunović, Lj., Radenović, S., Rajović, M. (2011), *Remarks on ,,Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of T-Kannan Contractive Mappings''* Math. and Computer Modeling, 54, 1467-1472.

Fadail, Z. M., Ahmad, A. G. B., Paunović, Ljiljana (2012), *New fixed point results of single-valued mapping for c-distance in cone metric spaces,* Abstract and Applied Analysis, Article ID 639713, 12 pages.

Huang, L. G., Zhang, X. (2007), *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings,* J. Math. Anal. Appl. 332, 1468-1476.

Ilić, D., Rakočević, V. (2008), *Common fixed points for maps on cone metric space,* J. Math. Anal. Appl. 341, 876-882.

Radenović, S. (2009), *Common fixed points under contractive conditions in cone metric spaces,* Computers and Mathematics with Applications 58, 1273-1278.

Radojević, S., Paunović, Lj., Radenović, S. (2010), *Abstract metric spaces and Hardy-Rogers-type theorems,* Applied Mathematics Letters 24, 553-558.

Vetro, P. (2007), *Common fixed points in cone metric spaces,* Rend. Circolo Math. Palermo 56, 464-468.

Wang, C., Li-wei Liu (2009), *Convergence theorems for fixed points of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces,* Nonlinear Analysis, 70, 2067-2071.

Wang, C., Zhu, J., Damjanović, B., Hu, Liang-gen (2009), *Approximating fixed points of a pair of contractive type mappings in generalized convex metric spaces,* Applied Mathematics and Computation 215, 1522-1525.

Wang, C., Zhu, Daoli., Li, Jin (2010), *Convergence Theorems for the Unique ommon Fixed Point of a Pair of Asymtotically Nonexpansive Mappings in Generalizad Metric Spaces,* Fixed Point Theory and Applications, Article ID 281890, 6 pages.

Zabreiko, P. P. (1997), *K-metric and K-normed spaces: survey,* Collect. Math 48, 852-859.

CONVERGION OF ITERATIONS WITH ERROR FOR A UNIFORM LIPSHIC REFLEXION IN CONUS METRIC SPACE

Summary: *Takahashi was first to introduce a notion of convex metric space in 1970. It should be pointed out that every linear standard space is a particular example of convex metric space, but there is some convex metric space that cannot fit into a standard space. In the last few years, a asymptomatic none-expansive reflections and asymptomatic quasi none-expansive reflections have been studied extensively within the convex metric space.*
This paper observes Ishikawa type of iterative process for near determining of fixed point for two even quasi Lipshic reflections in the conic metric space. Some results of a fixed point for these reflections for complete generalized convex metric space are enlarged onto the conic metric space.

Key words: *convex metric space, Ishikawa type of iterative process, asymptomatic none-expansive reflections, asymptomatic quasi none-expansive and uniform quasi Lipshic reflections*

КОНВЕРГЕНЦИЯ ИТЕРАЦИИ С ПОГРЕШНОСТЬЮ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ QUASI-LIPSHICOV-ЫХ ПРОЭКЦИЙ В КОНИЧЕСКИЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Резюме: *Takahashi впервые ввел понятие конвексного метрического пространства в 1970 году. Следует отметить, что каждое линейное нормированное пространство является конкретным примером конвексного метрического пространства, но существуют некоторые конвексные метрические пространства, которые не могут быть включены в стандартное пространство. В последние годы асимптотические экспансивные отображения и асимптотические неэкспансивные отображения хорошо изучены на уровне метрического пространства. В данной работе рассмотрены Ishikawa типы сходимости итерационного процесса для приблизительного определения фиксированной точки двух равномерных quasi-Lipshicov-ых отображений в конусном метрическом пространстве. Некоторые результаты о фиксированной точке отображения для этих комплектных генерализованных конвексных метрических пространств распространяются на конусные метрические пространства.*

Ключевые слова: *конвексные метрические пространства, Ishikawa - тип итеративного процеса, повторяющийся процесс, асимптотические экспансивные отображения, асимптотические неэкспансивные отображения, равномерное quasi-Lipshicovo отображение*