

Зорица Веселиновић³²

Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ГЕОМЕТИЈА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

***Апстракт:** Један од основних задатака почетне наставе математике је да ученици изграде основна сазнања о просторним формама и односима међу њима, као и да формирају основне геометријске појмове. Такав задатак се остварује преко изучавања геометријски садржаја предвиђених наставним програмом. Основу формирања геометријских појмова чини објективна стварност и сопствене активности ученика. На тај начин код ученика треба формирати јасне и правилне представе о неком геометријским формама које доприносе развоју мишљења код ученика, развијању просторних представа и усавајању одређеног фонда знања, умења и навика за цртање и мерење, а све у функцији припреме за успешно изучавање систематског курса наставе геометрије у основној школи.*

Кључне речи: настава математике, геометрија, геометријски појам.

Увод

Геометрија као део математике у свом првобитном значењу представљала је науку о простору. Она проучава облике, величине и узајамне положаје предмета. Садржаји из геометрије заступљени су у почетној настави математике са основним задатком да деца формирају јасну представу о појмовима основних геометријских фигура и однос међу њима. Почетна настава геометрије представља темељ процеса увођењем геометрије, а централно место заузима однос *реалност-геометријска апстракција-реалност*. Тај однос је поставка од које се у основној школи мора поћи при формирању геометријских појмова. Исто тако, мора се нагласити да није могуће прописати један рецепт за формирање геометријских појмова, јер то зависи од многих околности.

Приликом формирање основних појмова из геометрије треба водити рачуна о когнитивним могућностима ученика. Тај пут формирања појма из

³²zoka1982@live.com

геометрије код деце иде од уочавања одговарајућих реалних предмета, њихових заједничких особина, именовање појма и симболичко записивање.

Предмет овог рада је теоријско сагледавање проблематике формирања геометријских појмова као и различити методички аспекти њиховог формирања.

Циљ рада је да покаже постојање нераскидиве везе процеса формирања геометријских појмова и њихове усвојености од стране ученика – геометријска знања.

Геометријски појмови у почетној настави математике

Реч појам је често у оптицају у обичном говору, па ипак није једноставно фиксирати и прецизније одредити његово значење. Појам је логичка категорија. То је увек мисао о суштини или бити онога о чему мислимо, било да мислимо на стварни предмет, објекат или на садржину неких мисли, тј. замишљени идеални објекат. Појам *дете* није мисао о било каквим својствима детета, него мисао о оним својствима по којима се оно распознаје, издваја од одраслих људи. Уопштено, о једном појму говоримо онда када изванредан број објеката или догађаја на основу извесних заједничких карактеристика бива означен заједничким именом.

Процес стицања знања у математици темељи се на схватању математичких појмова. „Један математички појам схвата се, разуме ако су позната она битна својства тог појма која су потребна и довољна за његово коришћење ступњу на коме се он изучава“ (Малиновић, Малиновић-Јовановић, 2002). Сазнајни процес о математичком појму представља веома сложен психолошко-логички процес. Овај процес обухвата чулно-искуствену и мисаону фазу које почињу посматрањем предмета, односно модела. Посматрањем уочавају се нека својства која се одражавају у свести. За то одражавање у свести кажемо да је то опажај или перцепција. На основу својстава која ученици задрже у свести стичу представу о појму који може имати битна, небитна и еквивалентна својства. У чулној фази, математичким мишљењем, одабирамо битна, карактеристична својства која су битна за дати појам, а одбацујемо небитна и нематематичка својства. На тај начин формирамо математички појам који се од представа разликује у томе што појам садржи само битна својства, а представа поред битних и небитна својства. Најважнија мисаона операција у изградњи математичких појмова је математичка апстракција па према њеном ступњу изградњу математичких појмова посматрамо на: првом ступњу апстракције и вишим ступњевима апстракције. Апстракцијом се одстрањују нематематичка и небитна својства објекта и задржавају битна.

У неким ситуацијама представа о појму се може стећи и без директног посматрања, на вербалној основи. Па тако, ако су ученици стекли представу о појму троугла, могу стећи представу о четвороуглу, на вербалној основи, без посматрања модела четвороугла. Овај процес формирања математичког појма подразумева активно учешће ученика и омогућава трајно задржавање датих појмова у свести ученика, јер „никоме, па ни ученицима, чак ни најмлађим, не могу се, и не смеју, поклањати готови појмови, односно појмови који су резултат туђег мишљења“ (Малиновић, Малиновић-Јовановић, 2002).

Ослањајући се на појмовну логику, изгледа смислено да сагледавамо различите врсте математичких појмова. Најпре можемо направити разлике између „појмова који се односе на особине“ и „појмова који се односе на релације“. Појмови који се односе на особине могу се приписати одређени појединачним објектима (троугласт, четвороугаон, прост број, ...). Релациони појмови могу да буду придружани или одређени паровима или групама од три и више објеката (... дужи је од ..., лежи између ... и ...).

Подела математичких појмова може бити на „просте“ и „сложене“ појмове. Сложени (изведени, дефинисани) се могу, кроз дефиницију, сводити на друге појмове, док се са једноставнијим то не може чинити. Прости појмови у математици су тзв. „основни појмови“ (тачка, права, лежи на, ...). Избор основног појма је у извесној мери произвољан, односно зависи од избора аксиоматске базе. У школској настави (која није аксиоматска) прости појмови су они који „не захтевају даља објашњења“, а ова наведена чињеница има релативно значење.

Пример – сећи се, лежи испод (изнад, лежи лево, десно од), површ, лопта итд...

Основни задатак изучавања геометријских садржаја, у почетној настави математике, је формирање код деце јасних представа и појмова о основним геометријским фигурама, као и упознавање са односима међу њима. Појмови геометријских садржаја изграђују се чулно-искуственим и мисаоним сазнањем. Методички поступак формирања геометријских појмова стиче се поступно и то од фазе препознавања, ка стицању јасних представа и на крају долази фаза мисаоног формирања геометријских појмова.

У геометрији оперишемо с великим бројем појмова, као што су, на пример: тачка, права, угао, квадрат, ... Све појмове делимо на основне (полазне) и изведене (сложене).

У избору основних појмова поступамо у суштини слободно. Не мора се, рецимо, појам равни изабрати за један од основних појмова, раван се може и дефинисати. Но у избору полазних појмова имамо у виду извесне захтеве, као што је тај да у извођењу геометрије треба да изаберемо што једноставније геометријске ликове и односе за полазне појмове и да њихов број треба да буде што мањи, но ипак довољан да би се могли дефинисати

сви потребни појмови геометрије, или оне њене гране коју имамо у виду. Ако имамо довољно основних појмова да бисмо, полазећи од њих, развили геометрију, кажемо да они сачињавају *потпун систем основних појмова*. Разуме се, основни појмови не смеју доводити до логичке противуречности, већ треба да образују *непротивуречан систем*. Ако је број основних појмова најмањи који је при томе могућ, а то значи да се ни један не може дефинисати помоћу осталих, кажемо да су основни појмови међу собом *логички независни*. Али, геометричари се не држе строго овог трећег услова у извођењу геометрије, већ и стога што би зграда геометрије постала у својим почецима сувише сложена и изгубила би сасвим свој класичан лик. Данас најпознатији систем геометрије, који потиче од Хилберта, садржи шест полазних појмова.

Изведене појмове дефинишемо помоћу основних појмова, док се основни појмови не дефинишу. Анализираћемо следећу дефиницију угла: *Угао је лик који чине две полуправе које полазе из једне тачке*. У тој дефиницији објашњавамо појам угла помоћу других појмова и то појма *тачке* и *праве*. Поставља се питање: Да ли је могуће и ове појмове даље дефинисати? Појам тачке сматрамо основним те га не можемо дефинисати, а појам полуправе сматрамо изведеним и дефинишемо га на овај начин: полуправа је скуп тачака на правој које леже с једне исте стране једне њене тачке. Овом дефиницијом увидимо опет нове појмове, и то „права кроз једну тачку“ и „лежати с једне стране“.

На тај начин се првобитна дефиниција угла своди на две нове дефиниције и појам угла објашњавамо помоћу неких других појмова према шеми:

Појам угла дефинишемо помоћу појмова:

1. „тачка“,
2. „полуправа“

Појам полуправе дефинишемо помоћу појмова:

- 2.1. „права која пролази једном тачком“
- 2.2. „лежати с једне стране“.

Карактеристично је за таква постепена дефинисања да се одређени сложени појам објашњава помоћу других појмова које сматрамо једноставнијим или помоћу оних које смо већ дефинисали. Потпуно је природно да се не може ићи у недоглед из дефиниције у дефиницију. Негде морамо доћи до појмова које сматрамо довољно познатим или тако једноставним да их не треба дефинисати. То су управо појмови које зовемо основни геометријски појмови, за разлику од појмова који се помоћу њих дефинишу, а које зовемо изведени геометријски појмови или сложени појмови.

У начелу, дакле, објашњавамо сложеније појмове помоћу једноставнијих. Међутим, због неодређености појма „једноставније“ не

могу се потпуно разликовати основни од изведених појмова. Зато се јавља извесна слобода при избору основних појмова неког геметријског система.

Основне појмове усвајамо опажањем предмета стварног, физичког света помоћу *апстракције* као *математичке појмове*. Тако, на пример, до појма праве, а убрајамо га међу основне појмове, долазимо посматрањем правог, физичког правца који запажамо у облику напете нити, ивице оштрог предмета или на неки други начин. Апстрахујући (занемарајући) „дебљину“ физичког „правца“, долазимо до појма као одређеног геометријског лика који има само једну димензију. Из претходног је јасно да тачка, права, раван нису реални предмети. Оне нису ни реалне појаве. Тачка, права и раван су појмови које сваки од нас образује у својој свести.

Основне геометријске појмове обично делимо у три групе:

Табела 1. Подела основних геометријских појмова

1. Основне елементе	2. Основне радње	3. Основне односе
Тачка	Припадати	Између
Права	Сећи	Подударно
Раван	Спајати	Паралелно
	Лежати	

Почетна настава геометрије

Обрадом геометријских садржаја формирамо и развијао битне геометријске појмове и оспособљавамо ученике за решавање различитих задатака. На тај начин утврђујемо својства геометријских фигура и изграђујемо математичко мишљење.

Геометрија је математичка дисциплина која строго проучава простор и облике (фигуре и тела) који се могу замислити. У етимолошком смисли, реч геометрија значи „мерење Земље“ али је веома рано попримила много шире значење па је код старих грчких класичара представљала скоро целину теоријске математике. Много касније "предмет чисте геометрије је простор", подразумевајући под тим, интуитиван и физички простор, где се могу сместити све видљиве појаве. Данас се више не говори о простору, већ о просторима те би приближна дефиниција геометрије била: „Геометрија се бави пручавањем скупа названог простор чији су елементи тачке; ово проучавање је нарочито посвећено ендоморфизмима овог скупа“.

Као део математике, геометрија обухвата разне и обимне математичке теорије. Свуда је реч о просторним односима. Свуда се полази од просторних представа, па и онда када се те представе напуштају. У геометрији се проучавају особине тела, површи, линије геометријских ликова, а које се

односе на положај, облик, величину. При томе се у геометрији не посматра кретање у току времена, па ни посебне особине тела, као што су, на пример, топлина, еластичност итд. Истина, понекад се у геометрији говори о кретању, али то јесам ради погоднијег описивања чисто геометријских односа, као што је подударност. Апстрахује се дакле од времена и од разних других особина, којима се, напротив, бави физика и друге природне науке и њихове математичке теорије.

Садржај и карактер математичког образовања не остаје непромењен и у знатној мери је одређен стањем математичке науке, али у првом реду оним циљевима које образовању поставља друштво. Настава треба да садржи оно што ће касније бити потребно у животу, што ће развити ширину и самосталност мишљења ученика, али и оно што ће створити навику да се стечено искористи у разним ситуацијама у пракси. Веома је важно одгајати у свести ученика ону основну идеју да је циљ научног развитка сазнавање света који нас окружује и даље искоришћавање упознатих законитости у практичној делатности. Када је реч о настави геометрије, тада је од изванредног значаја не само да се покаже логичка савршеност њене сруктуре, него и њене многобројне везе са праксом и неизбежност њеног коришћења као драгоценог средства сазнања.

Од свих садржаја наставе математике у школи, геометријски садржаји су најмање интересантни ученицима. Задаци из геометрије представљају велики проблем. Они су у оној групи задатака који се, најчешће, и не покушавају решавати. Могу се навести многи узроци који доводе до овако слабих резултата. Најважнији од њих је деформација водећих циљева наставе геометрије у школи. Какви год да се циљеви декларишу у програму доводе је до представе да је основни циљ наставе геометрије развијање логичког мишљења код ученика. Тај циљ се претвара у задатак недостижан на раном степену обучавања, задатак да се код ученика формира аксиоматски начин размишљања. Због тога, развој логичког мишљења постаје фактички не само основни, него у суштини једини циљ наставе, одузимајући тиме и ученицима и учитељима снагу и време.

Ако се замислимо над суштином геометријског образовања, постаје јасно да су његови циљеви разноликији и садржајнији него што је пуко савладавање одређеног конкретног обима знања, умења и навика, који се одиграва на подлози декларисаног „над“ задатка курса – развоја логичког мишљења. Треба нагласити да геометрија нема и не може имати монопол у развоју логичког размишљања, она нема монопол над апстракцијом. Појмови *маса, сила, брзина, напон*, и други, представљају идеализацију физичке реалности приближно истог нивоа апстракције као и геометријски појмови *тачка, права, простор* или појмови из анализе *број, релација, функција*.

Геометрија је заступљена у свим наставним програмима за математику. То већ довољно говори о месту и значају геометрије како у

настави математике, тако и у целокупном програму образовања и васпитања. Учесће геометрије у наставним плановима и програмима потврђује познату чињеницу о органској повезаности геометрије са многим основним сазнањима о свету у којем живимо, па отуда и са низом области науке и праксе које су као посебни предмети ушле у школске програме.

Друштвено потребне циљеве наставе геометрије можемо схватити као органску синтезу *општекултурних, научних* (карактеристичних геометријских) и *примењених* циљева. И ако су научни и примењени циљеви наставе геометрије јасни, општекултурни су сведени само на развој логичког мишљења.

Дакле, друштвено потребни резултати наставе геометрије могу бити достигнути само ако не затворимо курс у оквире научних, чисто геометријских циљева, већ га изведемо на такав начин да у органској вези ефективно развија код ученика особине интелекта као што су:

- геометријска интуиција,
- просторно мишљење,
- логичко мишљење,
- способност за конструктивно-геометријске активности,
- владање макар у минималном обиму симболичним језиком геометрије.

Увођење у геометрију је процес систематског упознавања с геометријским фигурама и њиховим својствима и односима, процес систематског развијања смисла за геометријску апстракцију и поступног развијања способности дедуктивног закључивања и функционалног расуђивања везаног за геометријску материју. Тај процес није краткотрајан и ми нисмо и не можемо бити у стању да утврдимо његов почетни тренутак, исто као што немамо могућности да оценимо после којег се времена он успешно завршава, јер он започиње у дечијој свести свој стихијски развој још пре поласка детета у школу, а понекад не успева да достигне потребан ниво ни у последњем разреду основне школе, што зависи и од програма, и од ученика, и од наставника. Садржај и методе остваривања наставе геометрије у школи су перманентно предмет студиозних истраживања.

Битно питање геометрије и као науке и као наставне дисциплине јесте однос *реалност – геометријска апстракција – реалност*. На релацији реалност-геометријска апстракција, **прва** основна поставка од које се у основној школи мора поћи при увођењу геометријских појмова и која има свој дубоки филозофски смисао јесте *реално порекло појмова, њихов извор у реалности*.

У вези са наведеном поставком, **први задатак** у почетној настави геометрије треба да буде *систематизовање и обогаћивање тог искуства о простору и истовремено уочавање извесних геометријских елемената*.

Други задатак у почетној настави геометрије је: *поступно, али не и бојажљиво, ослобађање и обогаћивање геометријске имагинације ученика, као први услов за развијање даљих геометријских апстракција и просторне интуиције у свести ученика.*

Геометријски садржаји

Основна интенција програма у области геомртије је инсистирање помоћу природних и изграђених модела (дидактички материјал), који приближно идеално презентују „геометријске фигуре и тела“ облике, на геометрији (мерање дужи, површи тела). Изучавање геометријских садржаја повезује се с другим садржајима почетне наставе математике. Користе се геомартијске фигуре у процесу формирање појма броја и операција с бројевима и обрнтуо, користе се бројеви за изучавање свјостава геометријских фигура (Ибро, 2011).

Још у предшколском узрасту започиње усвајање основних геометријских појмова. У предшколској настави деца стичу основне представе о правој и кривој линији, отвореној и затвореној линији, унутрашњости, рубу и спољашњости површи. Они препознају облике квадрата, правоугаоника, троугла, круга, разликују рогљаста и обла тела, коцку, лопту, ваљак. Ове врло грубе представе систематизујемо и проширујемо у разредној настави математике.

Појмови из геометрије су пре свега одраз материјалног света, они изражавају особине, зависности и законитости реалног света. Међутим, не можемо остати само на том нивоу мисаоних активности, апстракцијом, генерализацијом, конкретизацијом, специјализацијом долазимо до апстрактних геометријских појмова.

Приликом изградње геометријских појмова на овом узрасту увек морамо водити рачуна о сазнајним могућностима ученика. У овом циклусу наставе геометријске објекте ученици схватају као целине које препознају по облику, а не по издвојеним елементима и њиховим својствима. У првом плану је опажање, активирање ученика за манипулисање предметима, што више очигледне наставе. Анализа није у првом плану, мада неке елементе и својства ученици могу и треба да искажу, моделују, нацртају и сл.

Руски академик Глејзер (Grigoriј Davidovič Glejzer) наставу геометрије у прва четири разреда основне школе назива очигледна геометрија, чији је основни циљ: да обогаћује геометријске представе ученика о равним и просторним геометријским фигурама, да ученици усвајају основну геометријску терминологију, да стичу вештину и навике цртања геометријских фигура. Према Грејзеру, основни облици ове наставе су:

- посматрање и израда (цртање) дводимензионалних и тродимензионалних геометријских фигура од хартије, картона, пластелина;
- извођење једноставних геометријских експеримената, утврђивање најједноставнијих својстава фигура, мерење и моделовање.

Наводимо и мишљење нашег академика М. Марјановића: „У почетном циклусу (од 7 до 11 године) геометријски облици се откривају преко физичких тела, у природном окружењу, која их матреијализују или путем томе намењеног дидактичког материјала (модела), као и путем слика којима се представљају у току наставе. Ти објекти се схватају на овом нивоу, као целине које се препознају по облику, а не по издвојеним елементима и њиховим својствима. Неке елементе и својства ученик уочава и исказује реторички или кроз сличне активности (моделовање, цртање, итд.) али опажање је у првом плану, а не анализа“ (Марјановић, 1996).

Апстракције морамо спроводити врло поступно. На овом узрасту не очекујемо да ученици потпуно коректно усвоје формалне дефиниције геометријских појмова. Овде користимо описне дефиниције. Ипак, никако не долази у обзир да се настава вулгаризује, да се уводе некоректне и погрешне дефиниције, принцип научности не сме бити жртвован.

Врло је битно научити ученика да правилно посматра геометријске објекте, да изнаходи што више њихових особина и уочава битне, а да апстрахује небитне особине (Ибро, 2011). На пример, када се обрађује троугао, ученик посматра предмете тог облика, затим посматра тространу пирамиду, издваја једну страну и црта је. Уочава да се та страна пирамиде састоји од три дужи које сачињавају затворену област, од три угла, три темења. Сада ученик изграђује критеријум помоћу којег ће неку фигуру сврстати у троуглове, а неку не. Та сазнања о троуглу ученик верификује и примењује у пракси приликом решавања геометријских задатака.

За методичку интерпретацију садржаја у првом разреду обилато се користе примери из непосредне ученикове околине. Још пре поласка у школу деца су стекла представе о разним облицима предмета са којима су долазили свакодневно у додир. Зато су те представе основа за формирање геометријских појмова. Задатак наставника је да стечена искуства ученика систематизује и да ученици разликују предмете према облицима граничних површина површи и схвате међусобну повезаност облика предмета и облика њихових површи. Имајући у виду степен развијености мишљења код ученика прети опасност од геометријације реалних предмета што није добро за касније схватање геометрије и њену апстракцију и генерализацију. Међутим, у другом разреду ученици су на другом нивоу схватања геометријских облика и односа, зато је и методичка интерпретација усмерена на откривање

својстава геометријских фигура у процесу опита, мерења, цртања и моделовања. Исто тако, ученицима трећег разреда геометрија се методички интерпретира применом мисаоних операција који представљају везу између другог и трећег нивоа откривања нових особина фигура.

Методичке интерпретације геометријских садржаја у четвртом разреду, на основу нивоа развоја, усмерамо на мисаоно закључивање без ослањања на опит. Закључци и дефиниције треба да се изводе на основу мисаоно откривених особина. Геометријски садржаји четвртог разреда груписани су око рогастих тела, квадрата и коцке. Геометријска тела ученици треба да схвате као математички појам са две карактеристике: сопствени карактеристичан облик и заузимање (запремање) дела простора, а мисаону границу издвојености дела простора – површ, као карактеристику која класификује тела.

Закључак

Још у предшколском узрасту почиње усвајање основних геометријских појмова, који се касније систематизују у разредној настави математике. Отуда и велики значај геометрије, као математичке дисциплине која строго проучава простор и облике (фигуре и тела), у почетној настави математике. Геометрија је заступљена у свим програмима за математику. Од свих садржаја наставе математике, садржаји геометрије су најмање интересантни ученицима. Процес усвајања геометријских појмова у почетној настави математике тече од уочавања одговарајућих реалних предмета, њихових заједничких особина, до именовања појмова и симболичког записивања. То подразумева систематско упознавање са геометријским фигурама и њиховим својствима и односима, процес систематског развијања смисла за геометријску апстракцију и поступног развијања дедуктивног закључивања и функционалног расуђивања везаног за геометријску материју. У почетној настави математике правимо разлику између појмова који су одређени појединачним објектима, то су „појмови који се односе на особине“ и „појмова који се односе на релације“, који се одређују паровима или групама од три или више објеката. У извођењу геометријских појмова треба полазити од што једноставнијих геометријских ликова и односа, као полазних појмова и од њиховог што мањег броја, али ипак довољног да би се могли дефинисати сложенији појмови. Сложени појмови се могу свести на друге појмове, док се са једноставним то више не може чинити. Циљ рада на геометријским садржајима у почетној настави математике је развијање код ученика логичког мишљења, геометријске интуиције, просторног мишљења, као и способности за конструктивно-геометријске активност.

Литература

- Дејић, М. и Егерић, М., (2003): *Методика наставе математике*, Јагодина, Учитељски факултет.
- Егерић, М., (2000): *Практикум методике наставе математике*, Јагодина, Учитељски факултет.
- Ибро, В., (2011): *Дидактичко-методичке могућности унапређења наставе математике у основној школи*, Призрен-Лепосавић, Учитељски факултет.
- Истомина, Н. Б., *Методика наставе математике у нижим разредима-први део*, Москва.
- Малиновић, Т. и Малиновић-Јовановић, Н., (2002): *Методика наставе математике*, Врање, Учитељски факулте.
- Марјановић, М., (1996): *Методика математике 1,2*, Београд, Учитељски факултет.
- Николић, М. М., (1967): *Уводне теме у методiku математичког образовања*, Београд, Младо поколење.
- Пинтер, Ј. и др., (2002): *Методички приручник из математике за разредну наставу*, Београд, Завод за уџбенике и наставна средства.
- Ћебић, С., (2004): *Методички аспекти формирања геометријских појмова*, Докторска дисертација, Универзитет у Крагујевцу, Јагодина, Учитељски факултет.

Zorica Veselinovic

Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

GEOMETRY IN THE INITIAL TEACHING OF MATHEMATICS

Summary: *One of the main tasks of teaching initial math to students is to build basic knowledge about the forms and spatial relationships among them, as well as to form the basic geometric concepts. This task is achieved through the study of the geometric contents of the curriculum provided. The basis of geometric concepts creates objective reality and students' own activities. In this way, the students should form clear and correct images of some geometric forms that contribute to the development of the thinking of students, the development of spatial presentation and acquiring a fund of knowledge, skills and habits of drawing and measuring, all in order to prepare them for a successful course of a systematic study of teaching geometry in primary school.*

Key words: mathematics, geometry, geometrical concept.