

Проф. др Алија Мандак²⁷

Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

Мр Златка Павличић²⁸

Средња школа „Никола Тесла“ Лепосавић

ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Апстракт: У раду је дат приказ историјског развоја наставе математике. Указано је да би историју наставе математике требало одвојити од историје настанка математичких знања и математике као науке. Историјски развој наставе математике приказан је од млађег каменог доба до данас. Резултати овог теоријског проучавања су показали да се настава математике стално развијала и унапређивала упоредо са развојем математике као науке. У новије време, настава математике изводи се према новим облицима, методама и моделима рада. Уместо традиционалног приступа настави и учењу, настава математике је диференцирана, интерактивна, егземпларна и респонсибилна. Изводи се уз ангажованије учешће ученика у своје учење и према иновативним дидактичко-методичким моделима наставе. Резултати овог теоријског проучавања приказани су у форми закључка и дате су педагошке импликације.

Кључне речи: математика, настава математике, математичка знања, историјски развој наставе математике, аритметика, алгебра, геометрија, анализа

УВОД

Математика је формална и егзактна наука. Настала је изучавањем фигура и рачунањем с бројевима. Током свог историјског развоја још од млађег каменог доба до данас, математика се стално развијала и унапређивала. Но без обзира на то, ни до данас није утврђена опште прихваћена дефиниција математике. У ширем приступу дефинисања математике, она је наука о количини (аритметика), структури (алгебра), простору (геометрија) и промени (анализа).

Математика се најпре развила из потребе да се мери пољопривредно земљиште и количина пољопривредних производа. Развијала се и из потребе мерења и прорачуна у занатству и трговини. Касније се јавила потреба за

²⁷ alija.mandak@pr.ac.rs

²⁸ zlatka.pavlicic@gmail.com

предвиђањем астрономских догађаја. Ове три почетне примене математике могу се довести у везу са грубом поделом математике на изучавање структуре, простора и промена. У данашње време математика углавном проучава и описује особине структура које сама ствара или које потичу из других наука, најчешће из физике.

Из оваквог одређења математике, постављају се бројни проблеми који су одувек били предмет проучавања теоретичара и практичара. До сада је математика углавном била проучавана са стручног аспекта. Поред тога, бројна емпиријска истраживања су значајно допринела њеном развоју. Недовољан је број теоријских проучавања која се баве историјском димензијом наставе математике. Проблем истраживања овог рада је истроисјки развој наставе математике.

ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Питање настанка наставе математике требало би одвојити од питања настанка математичких знања и математике као науке. Постоји јака основа да су нека математичка знања (бројање, распознавање геометријских облика), настала са настанком човечанства. Али, данашња математика, резултат је вишемиленијумског процеса и делатности људске врсте. Преношење математичког искуства са старијих генерација на млађе било је као припрема за живот и очување заједничких друштвених интереса. (Мандак, 2013) Тај пренос математичког искуства одвијао се као неорганизован и неповезан процес, а преносили су га мудри чланови заједнице који су се нарочито истицали својим вештинама и искуством.

Почеци математичког образовања (вештина рачунања) налазе се у најранијој етапи људског развоја у *млађем каменом добу*, а то потврђују документи пронађени на различитим локалитетима. Савремена историографија је са великом поузданошћу доказала да су прве пољопривредне цивилизације настале неколико хиљада година пре наше ере у долинама великих река: Египат у долини Нила; Вавилон у Месопотамији; у сливу Тигра и Еуфрата; Кина у долини реке Јанг Це и Индија у долини реке Инда. Према томе, ту су створане и прве математичке и културне тековине. Практичне потребе организовања пољопривреде, мерење поља после периодичних поплава, прикупљање пореза, састављање календара и други јавни радови захтевали су проучавање аритметике и геометрије.

Сви писани документи који се односе на индијску и кинеску математику потичу из периода нове ере, зато што су рађени на неотпорном материјалу (бамбусова кора и папир у Кини). Најтрајније су глинене плоче из Месопотамије, док су египатски папируси могли да се сачувају захваљујући сувој клими. Подаци о развоју математике у Вавилону сачувани су на глиненим плочицама. Око 30.000 глинених плочица на којима је коришћено

клинасто писмо, чине комплетну математику старих Вавилонца. Холандски математичар Нејгербауер прочитао је и дешифровао све глинене плочице.

На основу пронађених глинених плочица, претпоставља се да су још у трећем веку п.н.е стари Сумери оснивали школе у којима су деца, између осталог, учила математику на плочама од влажне глине. На њима се појављују симболи бројева и рачунских операција. Сумери су имали позициони бројни систем са основом 60, таблице множења, ознаке за разломке. Вавилонци су решавали све типове линеарних и квадратних једначина, формулишући их у геометријској форми.

Из Вавилонa, математичка знања ширена су на друга подручја Блиског истока и Египта. У другој половини 19. века (1858. године) у Египту је откривен папирус Рајнд (по имену шкотског египтолога Хенрија Рајнда (Henry Rhind), који га је откупио од египатских сељака, случајних налазача, негде у околини Луксора. Овај папирус је око 6м дуг и 30цм широк, и стручњаци га датирају у 1650. години пре нове ере. Писан је сликовитим писмом (хијероглифи) и познат је под насловом *Инструкције за упознавање свих тајни ствари*. На маргинама овог папируса налази се име преписивача *Ахмеса*, који о себи каже да он само преписује математичке задатке са другог папируса стар у том тренутку 200 година. Он садржи 85 аритметичких задатка. Овај папирус је 1863. године предат Британском музеју, где се и данас налази и чува. Због тога је познат још под именом *Лондонски папирус*. Њега је 1877. године дешифровао професор А. Эйзенлор и по њему, папирус се односи на период од 2000. – 1700. године пре нове ере до нове ере.

Други важан документ о египатској математици је *Московски папирус* (око 1850. године пре нове ере). Он је два века старији и садржи 25 задатака. Овај ретки и веома цењени примерак давне прошлости проучаван је од стране руских научника – академика Тутајева и Струва. Египћани су изводили множење помоћу удвостручавања а дељење помоћу половљења. Они су имали мере за дужину, површину и запремину и знали су за правоугли троугао са целобројним страницама 3, 4 и 5. Но без обзира на то, настава математике није добијала масовнији карактер ни онда када је у Грчкој основан већи број школа у којима се проучавала математика као једна од значајнијих подручја образовања. Те школе су носиле назив по оснивачу: *Питагорејска* (6. век пре нове ере) или *Платонова* (4. век пре нове ере), или по месту где су основане: *Милетска* (6. век пре нове ере), *Атинска* (5. век пре нове ере) или веома позната *Александријска школа* (3. век пре нове ере). У њима су учитељи преносили знања на ученике, али веома често заједно са њима проучавали још непроучена подручја математике. Зато, њихова важност није само у ширењу математичке писмености, већ и у развоју математике као науке.

Посебно снажан утицај оставила је Питагорејска школа на развој античке математике. Питагора је математику делио на апсолутне бројеве или

аритметику, примењене бројеве или музику, величине у стању мировања или геометрију и величине у стању кретања или астрономију. (Јушкевич, 1970) Његов филозофски принцип био је *Све је број*, а математику је стављао у основу сазнања. Најпознатији филозоф и математичар Атинске школе био је Платон (429–348 пре нове ере), Сократов ђак и Аристотелов учитељ. Он је основао школу у згради вежбалишта (gymnasium) коју је назвао Академија, по античком хероју Академу, заштитнику шуме у којој се она налазила. На вратима Платонове Академије писало је: *Нека нико не улази овде ко није геометар*.

Грчка култура и наука имале су значајан утицај на развој културе народа дуж обале северне Африке. Наиме, 331. године пре нове ере Александар Велики (356–323 пре нове ере) оснива град – Александрија, који постаје интелектуални и економски центар Хеленистичког света; оснива школу, музеј, библиотеку са око 600 хиљада рукописа, која је била највећа и најбогатија на целом свету. Окупља најбоља имена тог времена да предају и стварају ново знање и за то добијају плате. Посебно се ценила геометрија, а најугледнији математичар тог времена био је Еуклид (330–275 пре нове ере), који је изградио први аксиоматски приступ геометрије по коме се она и данас учи у основним и средњим школама (тзв. *Еуклидска геометрија*). Геометрија се у то доба проучавала логички, без очигледних средстава, па је учење било тешко и сложено. Еуклид је стварао у периоду владавине Птоломеја I и предпоставља се да је њему рекао да *нема краљевског пута у геометрију*.

У периоду процвата грчке културе и науке (од 5. до 3. века пре нове ере) захваљујући математичарима Александријске школе (Еуклид, Архимед, Аполон из Перге, Ератостен) математика и математичко образовање заузимају значајно место. Јавља се потреба за стварањем *интелектуалне аристократије*. Од наставе математике (аритметике и геометрије) захтевало се да буде што апстрактнија. То је био једини период када је настава математике имала шири карактер и значење, све до 17. века. У Риму прве јавне школе јављају се крајем 4. века пре нове ере, у којима се учи читање, писање, рачунање и мерење, али геометрији се слабо поклањала пажња. (Качапор, 1996) Најзапаженија школа у Римском царству била је у Риму у којој је радио чувени теоретичар и практичар Квинтилијан (Marcus Fabius Quintilianus, 42-118). Посебно је важан и зато што *први детаљно говори о методици наставе*. Математику средњег века обележило је рачунање на абаку (плоча за рачунање). Без абака било је тешко рачунати са великим бројевима, јер тада још није био познат позициони систем бројева.

Најзначајнија имена тог периода су везана за развој аритметике. Учени француз Жербер је 999. године проглашен за папу и боравећи у Шпанији он се упознаје са арапским системом бројева где пише своју књигу *Правила рачунања по абаку*. Увођењем позиционог бројног система бројева направљен је велики корак, не само у математици, већ и у историји културе уопште.

Рачунање абаком и римским бројевима постепено престаје да се користи. Математика неће дуго бити обавезан наставни предмет у основним школама.

У доба феудализма (8.–13. век) настале су црквене школе, у којима се учење сводило на црквену службу. Владала је строга дисциплина и крути ауторитет наставника. Од 12. – 13. века почињу да се отварају грађанске школе, школе занатских удружења, као и приватне школе. Настава математике се изводила у приватним школама и сводила се на технику рачуна. Предавачи су били тзв. *мајстори рачуна*. У тим школама није био циљ да се математички поступци разумеју, свесно схвате и анализирају, већ да се науче да примењују математичка правила, која су се учила напамет.

Арапска математика је имала утицаја на хришћанску математику у Шпанији, Италији, Француској. Најпознатију алгебру средњег века *Рачун* (Liber Abaci) написао је Леонардо из Пизе познат је под именом Фибоначи (Leonardo Fibonacci, 1180-1250) у којој објашњава систем арапских цифара и њихову предност над римским. И док је у средњем веку у алгебри учињен неки напредак, геометрија није била на завидном положају: математичари тог периода су је углавном преводили, тумачили или прерађивали дела великих грчких геометричара. Развојем буржоаског друштва развија се индустрија, повећава се продуктивност у индустрији и она захтева образованог радника. Тако се буржоуазија заинтересовала за давање најосновнијег образовања широким народним масама. Крајем 17. и 18. века отварају се основне школе у којима се, осим веронауке, читања и писања проучавају и садржаји рачуна. Математика улази у основну школу као обавезни наставни предмет. Тиме је организована настава математике добила масовни карактер, а математика је постала један од основних предмета општег образовања. Дакле, до увођења наставе математике у школе није дошло на основу педагошких разматрања и потреба, већ искључиво из практичних потреба бржег развоја индустрије и економије.

Увођењем математике као обавезног наставног предмета приступ изучавању садржаја није се битно променио у односу на приватне школе. Механичко учење правила и поступака и даље је било основа рада у настави математике. Учитељ је постављао задатке и решавао по одређеним шемама. У том периоду кад се јавља повећан интерес за образовање, када математика постаје један од темеља образовног система, онда она постаје центар интересовања многих педагога. Свој допринос унапређивању наставе математике дао је чешки педагог Коменски (Jan Amos Komenski, 1592-1670). Он је захтевао да се геометријски појмови изучавају још у почетној настави математике. Сматрао је да „...деца већ у трећој години треба да разумеју шта је велико и мало, кратко и дугачко, уско и широко, а у четвртој години треба да знају да именују неке фигуре, као на пример круг, дуж и права.“ (Filipović i Koletić, 1957, стр. 145) Од ученика се тражило да врше различита мерења.

Посебан допринос у дидактици Коменског је увођење принципа у настави. За наставу математике од изузетне важности су принцип очигледности, принцип поступности и систематичности. Инсистирало се на јасноћи и разумљивости математичких садржаја. Све до 18. века у настави математике било је највише заступљено рачунање по правилима која су се учила напамет. Да би се стање поправило и настава математике извукла из тог незавидног стања, био је потребан снажан импулс. Тај импулс се појавио у личности Јохана Хајнриха Песталоција (Johann Heinrich Pestalozzi, 1746-1827), швајцарског педагога и реформатора образовања. Сматрао је да деца не треба пружати готова знања, него прилику да сама сазнају кроз личну активност. Развојем интелектуалних способности треба постићи само један циљ: формирање моралног човека.

Песталоци, који је све своје снаге посветио проучавању елементарне наставе, пронашао је основно начело за ту наставу: *у броју, облику и речи* (Жлебник, 1983). Он истиче да су бројеви најбоље средство за разумевање психичких стања, и уз облик и говор број је основно, најважније и најснажније средство људске спознаје. У складу с тим, елементарна настава своди се на развијање вештине бројења, мерења и говорења. По Песталоцијевом схватању број, облик и говор припадају сваком предмету и зато су извор сваке спознаје. Он у настави математике највише пажње придаје очигледности и први је увео *очигледна средства*: јединичне таблице, квадратне таблице и таблице с цртама.

Вежбање у математици, по принципу поступности, треба да иде од лакшег ка тежем, од једноставнијег ка сложенијем. Такво вежбање било је замарајуће, јер се углавном рачунало споро и са великим и неименованим бројевима. Песталоци је у садржаје тадашње основне школе увео нове садржаје аритметике и основе геометрије. Своје успехе у раду са децом објавио је у свом делу *Како Гертруда учи своју децу* 1801. и 1803. године (Песталоци, 1946). Посебна заслуга Песталоцију припада што је *први написао детаљну методiku за елементарну наставу математике*.

Песталоци и његови следбеници били су представници *формалног образовања*. Али, многи методичари, њихови противници, међу којима је Дистервег (Adolph Diesterweg, 1790 -1866) имали су другачије ставове:

- рачунање има за циљ слободно и сврсисходно развијање ученикових психичких снага;
- усмено и писмено рачунање не треба одвајати;
- настава математике треба да оспособи ученике за практичне потребе у животу;
- појам броја се мора стећи очигледним путем и
- очигледност се не сме претворити у игру.

Даљи допринос у развоју наставе математике дао је Хербарт (Johann Friedrich Herbart, 1776-1841) који у садржају наставе математике види васпитно значење. Хербарт је наставу рашчланио на четири етапе, а оне су: 1) јасноћа, 2) асоцијација, 3) систем и 4) метод. Његови следбеници су крајем 19. века истицали да у подучавању треба водити рачуна о пет формалних корака: 1) припреми ума ученика, 2) излагању садржаја који ученик треба да научи, 3) поређењу тих садржаја са његовим предходним знањима, 4) генерализацији и 5) примени знања. Масовност математичког образовања крајем 19. века и почетком 20. века истакла је низ слабости и недостатака, како садржајне, тако и методичке природе. Осим појединачних настојања да се унапреди настава математике, одржавају се скупови математичара и педагога на којима се расправља о математици и настави математике и њеном учинку у основној и средњој школи.

Један од тих скупова је тзв. *Меранска конференција* одржана 1905. године у Мерану (Италија), чији је иницијатор био познати немачки математичар Феликс Клајн (Felix Kristijan Klajn, 1849-1925). Основни задатак те конференције било је питање наставе математике. Многи закључци са тог скупа познати су под називом *Мерански програм*, а и данас су актуелни:

- садржај наставе математике мора бити актуелан и из наставе треба избацити све што је практично безвредно;
- код ученика треба развити способност математичког посматрања, схватања и представљања процеса;
- треба развити способност функционалног мишљења и очигледности и
- постепено прелазити на апстрактно и дедуктивно мишљење.

Клајн је имао пресудну улогу у формулацији наставног плана у средњим школама и на приближавању наставе математике реалном животу и интересима ученика. Значајну улогу у унапређивању наставе математике преузима ИСМИ (Међународна комисија за наставу математике) (ИСМИ - International Commission on Mathematical Instruction), која је конституисана на IV међународном конгресу математичара, 1908. године у Риму. (Стројк, 1969) На челу те комисије стаје Ф. Клајн. Комисија је утврдила пет праваца развоја наставе математике, који ће обележити прву половину 20. века.

1. Успоставити тесну везу између 4 математичка наставна предмета (аритметика, алгебра, геометрија и физика).

2. Уградити у школски курс елементе више математике (математичка анализа, аналитичка геометрија) и успоставити везу између елементарне и више математике.

3. Истицати улогу водећих идеја у школском курсу математике: функција – у аритметици и алгебри, кретање – у геометрији итд.

4. Мењати карактер и методе решавања наставних задатака (више користити аналитичко-синтетички метод).

5. Шире употребљавати хеуристички метод у настави математике, итд.

Једна од 33 земље које су приступиле Међународној комисији за наставу математике била је и Србија. Први њен представник био је Михајло Петровић Алас (1868 – 1943), један од најистакнутијих српских математичара. (Марјнаовић, 1996; Гамов, 1955) Међународна комисија за наставу математике – ИСМИ била је посебно активна до првог светског рата, а нарочито деловање запажа се на V међународном конгресу математичара одржаног 1912. године у Кембриџу. (Ћебић, 2004) Између два светска рата ИСМИ није била активна, тако да није ни имала утицаја на наставу математике.

После другог светског рата ова комисија је реорганизована и наставила свој рад на проучавању актуелних проблема наставе математике. Нови подстицаји за модернизацију наставе математике данас се везују за рад UNESCO–а (Међународна организација за просвету, науку и културу) (UNESCO – United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization) уз непосредну акцију OECD – а (Европска организација за економску сарадњу) која има секцију за математику.

Осавремењавање наставе математике у нашој земљи подстицано је истим импулсима као и у свету. Друштво математичара Србије - ДМС основано 1948. године; Клуб младих математичара *Архимедес* почео са радом 1974. године. У Београду је 1966. године основана математичка гимназија која је 2007. године проглашена за институцију од националног значаја. Сваке године у организацији стручних институција, одржавају се семинари просветних радника Републике Србије. До данас, у нашој земљи је одржано 12 конгреса математичара.

ЗАКЉУЧАК

У овом раду је указано на основне правце историјског развоја наставе математике. Анализом развоја наставе математике од млађег каменог доба до данас, може се закључити да се стално развијала, унапређивала и развила у модерну науку која је основа бројних наука и њихових научних дисциплина. Унапређивање наставе математике је проблем којим се данас баве готово све земље света, тј. њихове стручне институције. Њихов рад је усмерен на два најактуелнија проблема наставе математике: 1) какво место припада настави математике и на који начин пренети научна достигнућа у наставним плановима математике и 2) које наставне методе и облици рада омогућују најефикасније и најрационалније стицање математичког знања. Све то указује да настава математике не сме остати на маргинама развоја савремене науке, већ њена улога мора добити нову и ширу димензију - све веће математичко образовање.

Литература

- Гамов, Ц. (1955). *Један, два, три...до бесконачности*. Београд: Техничка књига.
- Жлебник, Л. (1983). *Опита историја школства и педагошких идеја*. Београд: Научна књига.
- Качапор, С. (1996). *Историјски преглед настанка и развоја школе*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Мандак, А. (2013). Фробениусова група реда 24 и пројективна равна реда 11. *Зборник радова Учитељског факултета у Призрену-Лепосавићу*, 9(7), 173-178.
- Марјановић, М. (1996). *Методика математике I и II*. Београд: Учитељски факултет Универзитета у Београду.
- Песталоци, Х. (1946). *Како Гертруда учи своју децу*. ИП „Просвета“ Београд.
- Стројк, Д. (1969). *Кратак преглед историје математике*. Београд: Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије.
- Ћебић, С. (2004). *Методички аспекти формирања геометријских појмова* (докторска дисертација). Јагодина: Учитељски факултет у Јагодини Универзитета у Крагујевцу.
- Filipović, F., Koletić, M. (1957). *Računica za 3. razred narodne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
- Юшкевич, А. (1970). *История математики*. Москва: Издательство Наука.

HISTORICAL DEVELOPMENT OF TEACHING MATHEMATICS

Summary: *The paper presents historical development of teaching mathematics. It is suggested that history of teaching mathematics should be separated from history of mathematics knowledge and mathematics as a science. Historical development of teaching mathematics from the early Stone-age until the present day has been shown. Results of this theoretical research have shown that teaching mathematics has had a constant development and improvement together with development of mathematics as a science. In recent times, teaching mathematics has been conducted according to new types, methods and models of work. Instead of traditional approach to teaching and learning, teaching mathematics is now differentiated, interactive, exemplary and responsible. It is conducted with an active student participation in his/her learning and with innovative didactic and methodological models of teaching. Results of this theoretical research have been shown in the form of conclusion and pedagogical implications given.*

Key words: *mathematics, teaching mathematics, mathematics knowledge, historical development of teaching mathematics, arithmetic, algebra, geometry, analysis*

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Резюме: Данная статья представляет краткий обзор истории развития математики. Было отмечено, что история математики должна быть отделена от истории появления элементарных математических знаний и математики как науки. Историческое развитие математики представлено от неолита до наших дней. Результаты этого теоретического исследования показали, что преподавание математики непрерывно совершенствовалось и прогрессировало наряду с развитием математики как науки. В настоящее время преподавание математики проводится посредством новых форм, методов и режимов работы. Вместо традиционного подхода к преподаванию и обучению, преподавание математики дифференцировано, интерактивно, экзemplярно и ответственно. Проводится с привлечением учеников к участию в процессе обучения посредством инновационных дидактических и методических моделей обучения. Результаты этого теоретического исследования представлены в виде вывода, где предложены педагогические импликаци.

Ключевые слова: математика, преподавание математики, математические знания, история развития преподавания математики, арифметика, алгебра, геометрия, математический анализ.