Зборник радова Учитељског факултета, 7, 2013, стр. 173-178
UDK 514.752.5
ID 203383308

Проф. др Алија Мандак[43]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ФРОБЕНИУСОВА ГРУПА РЕДА 24 И ПРОЈЕКТИВНА РАВАН РЕДА 11

Апстракт: *У раду се доказује да група Фробениуса реда 24 делује на пројективну раван P реда једанаест као група колинеацијe. Користећи ово деловање раван P се може конструисати.*

Кључне речи: пројективна раван, група, колинеација, орбита

1. НЕКЕ ДЕФИНИЦИЈЕ И РЕЗУЛТАТИ

Структура инциденције је тројка D = (V, B, I), где су V и B дисјунктни скупови и $I \subseteq V \times B$. Елементи скупа V зову се *тачке*, елементи скупа B зову се *блокови*. Ако је A тачка скупа V онда скуп свих блокова који су инцидентни са тачком A означава се са (A). Тако је

$$(A) = \{b: b \in B, A\ I\ b\}.$$

Даље, за $A_1, A_2, \ldots, A_n$, скуп свих блокова инцидентних са свим тачкама $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означава се са $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тако је

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \{b: b \in B, A_i\ I\ b \text{ for all } i \in N_n\},$$

где је N скуп свих позитивних целих бројева, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Дуално, за b, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$,

$$(b) = \{A: A \in V, A\ I\ b\},$$

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \{A: A \in V, A\ I\ b \text{ for all } i \in N_n\}.$$

[43] alija.mandak@pr.ac.rs

Ми ћемо разматрати структуре инциденције у којима су различити блокови инцидентни са различитим скуповима тачака. Сваки блок b се ицентификује са скупом тачака (b) а релација инциденције идентификује се са обичном релацијом $\in$.

Дефиниција 1. Структура инциденције P = (V, B, I) зове се *пројективна раван* ако и само ако испуњава следеће аксиоме:

(P. 1) Било које две различите тачке спојене су са тачно једном правом.

(P. 2) Било које две различите праве секу се тачно у једној тачки.

(P. 3) Постоји *четвороугао*, тј. 4 тачке од којих било које три нису на заједничкој правој.

Следећа теорема је доказана у [1].

Теорема 1. Нека је P = (V, B, I) коначна пројективна раван. Постоји природни број n, зове се *ред* равни P, који испуњава:

a) $|(A)| = |(g)| = n+1$ за све $A \in V$ и $g \in B$;
b) $|V| = |B| = n^2 + n + 1$.

Коначна пројективна раван реда n означава се са $S(2, n + 1, n^2 + n +1)$.

2. КОНСТРУКЦИЈА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ РЕДА ЈЕДАНАЕСТ

Теорема 2. Група Фробениуса G реда 24 делује на пројективну раван P реда једанаест као група колинеација. Користећи ово деловање раван P се може конструисати.

Доказ. Нека је

$$G = \left\langle \rho, \alpha / \rho^{12} = \alpha^2 = 1, \rho^{\alpha} = \rho^{-1} \right\rangle$$

Група Фробениуса реда 24 која делује на пројективну раван P реда 11 као група колинеација. Раван P има $11^2 + 11 + 1 = 133$ тачака и исто толико правих. Из $133 = 12 \cdot 11 + 1$ и из тврђења да колинеација $\langle \rho \rangle$ делује семирегуларно на нефиксним тачкама следи да $\langle \rho \rangle$ има 11 орбита тачака дужине 12 и једну орбиту дужине 1. Можемо узети да је

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_{11})(2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_{11})(3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_{11}) \cdots (11_0, 11_1, 11_2, \cdots 11_{11})$$

Где су $1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_{11}, 2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_{11}, 3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_{11}, \cdots 11_0, 11_1, 11_2, \cdots 11_{11}$ све тачке равни P.

Из теореме о орбитама следи да $\langle\rho\rangle$ има исту структуру орбита правих. Можемо узети да је

$$\rho=(\ell_\infty)(\ell_1,\ell_1\rho,\ell_1\rho^2,\cdots,\ell_1\rho^{11})(\ell_2,\ell_2\rho,\ell_2\rho^2,\cdots,\ell_2\rho^{11})$$
$$(\ell_3,\ell_3\rho,\ell_3\rho^2,\cdots,\ell_3\rho^{11})\cdots(\ell_{11},\ell_{11}\rho,\ell_{11}\rho^2,\cdots,\ell_{11}\rho^{11})$$

где су
$\ell_\infty,\ell_1,\ell_1\rho,\ell_1\rho^2,\cdots,\ell_1\rho^{11},\ell_2,\ell_2\rho,\ell_2\rho^2,\cdots,\ell_2\rho^{11},\ell_3,\ell_3\rho,\ell_3\rho^2,\cdots,\ell_3\rho^{11},\cdots,$
$\ell_{11},\ell_{11}\rho,\ell_{11}\rho^2,\cdots,\ell_{11}\rho^{11}$

Све праве равни P.

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle\rho\rangle$. Можемо узети да је

$$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \cdots, 1_{11}\}.$$

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle\rho\rangle$. Можемо узети да је

$$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \cdots, 1_{11}\}.$$

Нека је ℓ_1 права која пролази кроз ∞. Очигледно је да ℓ_1 садржи по једну тачку из сваке орбите тачака. Без губитка општости можемо узети да је

$$\ell_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \cdots, 11_0\}.$$

Осталих једанаест правих орбите правих којој припада права ℓ_1 добијају се деловањем колинеација $\rho,\rho^2,\rho^3,\cdots,\rho^{11}$ на праву ℓ_1. Праве ℓ_1 и ℓ_∞ пролазе кроз 1_0. Осталих десет права $\ell_2,\ell_3,\cdots,\ell_{11}$ које пролазе кроз 1_0 леже у десет преосталих различитих $\langle\rho\rangle$- орбита правих равни P. Ако се конструишу ове праве онда преостале све праве равни P се добијају деловањем колинеација $\rho,\rho^2,\rho^3,\cdots,\rho^{11}$ на праве $\ell_2,\ell_3,\cdots,\ell_{11}$. Из услова

$$\left|\ell_i\cap\ell_1\rho^k\right|=1,\ i = 2, 3, \cdots, 11,\ \ k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 11$$

Следи да је

$$\ell_i=\{1_0, 1'_1, 2'_2, 3'_3, \cdots, 11'_{11}\}$$

где су 1’, 2’, 3’, 4’, ..., 11’ (необавезно различити) бројеви скупа {2, 3, ⋯, 11}.

Сада испитујемо деловање колинеације α на скуп тачака и скуп правих равни P. Како је ред инволуције α паран следи да је инволуција α елација. Из $\rho^{\alpha} = \rho^{-1}$ следи да је 1_0 центар и права ℓ_1 оса инволуције α. Отуда, инволуција α фиксира 12 правих $\ell_{\infty}, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_{12}$ и 12 тачака ∞, 1_0, 2_0, 3_0, $\cdots$, 9_{11}. Из 133 = 2 · 60 + 13 следи да α има 13 орбита тачака дужине 1 (13 фиксних тачака) и 60 орбите тачака дужине 2. Ако орбитарну структуру колинеације α запишемо у скраћеном облику (записујући само индексе 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 11) можемо узети да је

$$\alpha = (0)(1)(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7)$$

где (2, 11) означава даје 2α = 11 из исте орбите тачака, (3, 10) означава да је 3α = 10 из исте орбите тачака, (4, 9) означава да је 4α = 9 из исте орбите тачака, (5, 8) означава да је 5α = 8 из исте орбите тачака, (6, 7) означава да је 6α = 7 из исте орбите тачака. Из тврђења

$$\ell_i \alpha = \ell_i, \quad i = 2, 3, \cdots, 11$$

следи да су праве ℓ_i, i = 2, 3, $\cdots$, 11 типа

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_{11}, b_3, b_{10}, c_4, c_9, d_5, d_8, e_6, e_7\}$$

где су a, b, c, d, e према паровима различити бројеви скупа {2, 3, $\cdots$, 11}. Можемо узети да је

$$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 2_2, 2_{11}, 3_3, 3_{10}, 4_4, 4_9, 5_5, 5_8, 6_6, 6_7\}.$$

Сада се конструишу праве ℓ_i, i = 3, 4, $\cdots$, 11 које су типа

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_{11}, b_3, b_{10}, c_4, c_9, d_5, d_8, e_6, e_7\}$$

Из тврђења

$$\left|\ell_i \cap \ell_2 \rho^k\right| = 1, \quad i = 3, 4, \cdots, 11, \; k = 0, 1, 2, \cdots, 11$$

следи да су само три из бројева i, a, b, c, d, e из скупа {2, 3, 4, 5,6} а остала три су из скупа {7, 8, 9,10, 11}. Из тврђења

$$\left|\ell_i \rho^s \cap \ell_j \rho^k\right| = 1,\ i \neq j,\ i, j = 3, 4, \cdots, 11,\ k, s = 0, 1, 2, \cdots, 11$$

следи да праве ℓ_i и ℓ_j, i $\neq$ j, имају тачно три заједничка бројева $i, a, b, c, d, e.$. Користећи ово тврђење за праве ℓ_i, i = 3, 4, $\cdots$, 11 добија се следеће јединствено решење за ове праве:

$$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 3_2, 3_{11},\ 4_3, 4_{10}, 7_4, 7_9, 8_5, 8_5, 9_6, 9_7\}$$
$$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 4_2, 4_{11},\ 5_3, 5_{10}, 8_4, 8_9, 9_5, 9_5, 10_6, 10_7\}$$
$$\ell_5 = \{1_0, 5_1, 5_2, 5_{11},\ 6_3, 6_{10}, 9_4, 9_9, 10_5, 10_5, 11_6, 11_7\}$$
$$\ell_6 = \{1_0, 6_1, 6_2, 6_{11},\ 7_3, 7_{10}, 10_4, 10_9, 11_5, 11_5, 2_6, 2_7\}$$
$$\ell_7 = \{1_0, 7_1, 7_2, 7_{11},\ 8_3, 8_{10}, 11_4, 11_9, 2_5, 2_5, 3_6, 3_7\}$$
$$\ell_8 = \{1_0, 8_1, 8_2, 8_{11},\ 9_3, 9_{10}, 2_4, 2_9, 3_5, 3_5, 4_6, 4_7\}$$
$$\ell_9 = \{1_0, 9_1, 9_2, 9_{11},\ 10_3, 10_{10}, 3_4, 3_9, 4_5, 4_5, 5_6, 5_7\}$$
$$\ell_{10} = \{1_0, 10_1, 10_2, 10_{11},\ 11_3, 11_{10}, 5_4, 5_9, 6_5, 6_5, 7_6, 7_7\}$$
$$\ell_{11} = \{1_0, 11_1, 11_2, 11_{11},\ 2_3, 2_{10}, 6_4, 6_9, 7_5, 7_5, 8_6, 8_7\}$$

Теорема је доказана.

3. ЗАКЉУЧАК

Овај рад презентује резултат добијен деловањем групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P за коју унапред знамо да постоји. Слично може се испитивати деловање групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P чије је питање егзистенције отворено.

Литература

Beth, T., Jugnickel, D., Lenz, H,: *Design theory,* Manheim,Wien, Zurich, 1985.

Čupona, Ġ., Stojaković, Z., Ušan, J.: *On finite multiquasigroups,* Publ. Inst. Math. (Beograd) 20 (43) 1981, 53-59.

Čupona, Ġ., Stojaković, Z., Ušan, J.: *Multiquasigroups and some related structures,* Prilozi MANU I/1, Skopje, 1980.

Dimovski, D., Mandak, A.: *Incidence structures with n-metrics,* Zb. Rad. Fil. Fak. (Niš) 6 (1992), 151-155.

Dimovski, D., Mandak, A.: *Weighted block designs and Steiner systems,* Novi Sad J. Math. Vol. 29, No.2 (1999), 163-169.

Lenz, H.: *Vorlesungen uber projective geometrije,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.

Mandak, A.: *On weighted block designs,* Proc. The Second Math. Conf. of Republik of Srpska (Trebinje, 2012) 57-63.

Mandak, A.: *Multiquasigroups and weighted projective planes,* Kragujevac J. Math. 30 (2007) 211-219.

Ušan, J.: *<Nn, E>-seti s (n + 1)-rastojaniem,* Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math, 17 (2) (1989), 65-87.

Alija Mandak, Ph.D.
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

FORBENIUS GROUP OF 24 ORDER AND PROJECTIVE PLANE OF ORDER 11

Summary: *The paper proves that the Forbenius group of order 24 acts on projective plane R of order 11 as a co-lineation group. Using this activity plane, P can be constructed.*

Key words: Projective plane, group, co-lineation, orbit.