Зборник радова Учитељског факултета у Призрену – Лепосавић, 6, 2012.

Др Љиљана Р. Пауновић[31]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ GERAGHTY-ТИПА СА ЈЕДИНОМ ПРЕТПОСТАВКОМ О НЕПРАЗНОЈ УНУТРАШЊОСТИ КОНУСА

Апстракт: *Geraghty је 1973. године доказао уопштење Банахове основне теореме када су у питању комплетни метрички простори. Одговарајући резултат за конусне просторе показали су 2010. године Amini-Harandi и Fakhar али само за солид конусе који имају базу. У овом раду дат је оригинални доказ теореме Geraghty- типа са једином претпоставком о непразној унутрашњости конуса. У доказу теореме се користи функционал Minkovskog.*

Кључне речи: конус, tvs конусни метрички простори, солид конус, функционал Minkovskog.

Неке дефиниције и резултати

Дефиниција 1: Нека је E реалан Банахов простор. Подскуп P од E назива се *конус* ако је:

(а) P је затворен, непразан и $P \neq \{\phi\}$;

(б) $a, b \in R$, $a, b \geq 0$, $x, y \in P$ следи да је $ax + by \in P$;

(ц) $P \cap (-P) = \{\phi\}$.

Дефиниција 2: Нека је X непразан скуп. Претпоставимо да пресликавање $d : X \times X \to E$ задовољава следеће услове:

(а) $\theta \leq d(x, y)$ за све $x, y \in X$ и $d(x, y) = \theta$ ако и само ако $x = y$;

(б) $d(x, y) = d(y, x)$ за све $x, y \in X$;

(ц) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ за све $x, y, z \in X$.

Онда се d назива *конусна метрика* на X а (X, d) *конусни метрички простор.*

[31] ljiljana.paunovic@pr.ac.rs

Дефиниција 3: Нека је (X,d) конусни метрички простор и $\{x_n\}$ низ у X. За низ $\{x_n\}$ каже се да је *Кошијев низ* ако за свако $c \in E$ за $\theta < c$ постоји цео број N такав да за свако $n,m > N$ следи $d(x_n, x_m) < c$.

Конусни метрички простор X је *комплетан* ако је у њему сваки Кошијев низ конвергентан.

Дефиниција 4: Конус P у Банаховом простору E је:

(а) *нормалан* ако је $\inf\left\{\|x+y\| : x,y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\right\} > 0$;

(б) *семи-монотон* ако постоји $M > 0$, тако да за све $x,y \in E$ важи:

$\theta \le x \le y$ следи $\|x\| \le M\|y\|$;

(ц) *монотон* ако за све $x,y \in E$ важи:

$\theta \le x \le y$ следи $\|x\| \le \|y\|$,

тј., семи-монотон за $M = 1$.

Позитиван број M који задовољава услове из дефиниције назива се *нормална константа* за P. Јасно је да је $M \ge 1$. За конус P који није нормалан али задовољава $\operatorname{int} P \ne \phi$ (његова унутрашњост је непразан скуп) кажемо да је *солид конус.*

Нека је E векторски простор над пољем реалних бројева. Подскуп P простора E је *уравнотежен,* ако је $\lambda P \subseteq P$, када је $|\lambda| \le 1$. Подскуп P је *конвексан* ако је $\lambda P + \mu P \subseteq P$, када је $\lambda \ge 0, \mu \ge 0$ и $\lambda + \mu = 1$. Подскуп P је *апсолутно конвексан* ако је уравнотежен и конвексан.

Дефиниција 5: Нека је X непразан скуп. Векторска функција $p : X \times X \to Y$ каже се да је tvs-конусна метрика (Y је локално конвексан Хаусдорфов тополошки векторски простор са нула вектором θ) ако задовољава следеће услове:

(а) $\theta \le p(x,y)$ за све $x,y \in X$ и $p(x,y) = \theta$ ако и само ако $x = y$;

(б) $p(x,y) = p(y,x)$ за све $x,y \in X$;

(ц) $p(x,y) \le p(x,z) + p(z,y)$ за све $x,y,z \in X$.

Онда се p назива *tvs-конусна метрика* на X а (X,p) *tvs-конусни метрички простор* (tvs је тополошки векторски простор).

У случају када је Y реалан Банахов простор, функција p се назива конусном метриком.

Нека је сада V апсолутно конвексан и апсорпциони подскуп од $tvsE$, функционал Минковског се дефинише са

$$x \to qV(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda V\}$$

То је семи-норма на E тј., $qV(x+y) \le qV(x) + qV(y)$ за све $x, y \in E$ и $qV(\lambda x) = |\lambda| qV(x)$ за $x \in E$, λ је скалар, из $V \subset W$ следи $qW(x) \le qV(x)$.
Нека је (E, K) уређен тополошки векторски простор, и нека је $e \in \operatorname{int} K$. Онда $[-e,e] = (K - e) \cap (e - K) = \{z \in E : -e \le z \le e\}$ је апсолутно конвексна околина од θ.
Функционал Минковског $q_{[-e,e]}$ означићемо са q_e.

Дефиниција 6: Нека је $f : X \to X$, $x_0 \in X$ полазна тачка, онда је са $x_1 = fx_0, x_2 = fx_1 = f^2 x_0, ..., x_n = f^n x_0$ дефинисан низ у скупу X који се зове *Пикаров низ.*

Ако је E уређен Банахов простор са солид конусом P, онда се са S означава скуп свих функција $\beta : P \to [0,1)$ такве да

$$\beta(t_n) \to 1^- \Rightarrow t_n \to \theta \text{ када } n \to \infty \tag{1}$$

У (Geraghty, 1973, 604-608) је доказано следеће уопштење Банахове основне теореме.
Ако је

$$d(fx, fy) \le \beta(d(x,y)) d(x,y), \text{ за свако } x, y \in X,$$

где је (X, d) комплетан метрички простор, $f : X \to X$, $\beta : [0, +\infty) \to [0,1)$ такво да важи услов (1), тада f има јединствену фиксну тачку и за свако $x \in X$ Пикаров низ $f^n x$ конвергира поменутој јединственој фиксној тачки.

Одговарајући резултат за конусне просторе показан је у (Amini-Harandi и Fakhar, 2010, 3529-3534) али само за солид конусе који имају базу.

Сада дајемо доказ теореме Geraghty – типа са јединим претпоставком о непразној унутрашњости конуса P.

Доказ теореме GERANTY-типа са једином претпоставком о непразној унутрашњости конуса

Лема 1: Ако у метричком простору (X, d_q) имамо низ $\{x_n\}$ такав да $d(x_n, x_{n-1})$ опада и тежи нули онда је тај низ Кошијев.

Теорема 1: Нека је (X,d) комплетан конусни метрички простор, $f:X\to X$ таква да постоји $\beta:P\to[0,1)$ са особином (1) тако да је за свако $x,y\in X$

$$d\big(fx,fy\big)\le \beta\big(d(x,y)\big)d(x,y) \tag{2}$$

онда f има јединствену фиксну тачку z и за свако $x\in X$ важи:

$$f^{n}(x)\to z,\ \text{када}\ \ n\to\infty .$$

Доказ: Применићемо метод функционала Minkovskog. Другим речима, пошто је $\operatorname{int}P\ne\phi$, постоји $e\in\operatorname{int}P$ такво да је $d_q=q_e\circ d$ метрика на X, онда (2) постаје

$$d_q(fx,fy)\le \beta\big(d(x,y)\big)d_q(x,y) \tag{3}$$

Нека је сада $x_{n+1}=fx_n$, $n\ge 0$, где је $x_0\in X$ дата тачка. Ако је $x_{n_0+1}=x_{n_0}$ за неко n_0, тада је доказ завршен. У том случају ако f има фиксну тачку, тада је она јединствена.

За низ $\{x_n\}$ према (3) имамо

$$d_q(x_{n+1},x_n)=d_q(fx_n,fx_{n-1})\le \beta\big(d(x_n,x_{n-1})\big)d_q(x_n,x_{n-1})<d_q(x_n,x_{n-1}).$$

Ово даље значи да низ $d_q(x_{n+1},x_n)$ опада, пошто је ограничен одоздо има лимес. Означимо тај лимес са $L.$ Нека је $L>0$, онда из услова

$$\frac{d_q(x_{n+1},x_n)}{d_q(x_n,x_{n-1})}\le \beta\big(d(x_n,x_{n-1})\big)<1,$$

добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty}\beta\big(d(x_n,x_{n+1})\big)=1$, одакле према услову (1) следи да низ вектора $d(x_n,x_{n-1})\to\theta$ у Банаховом простору E. Пошто је функционал Minkovskog $q_e:E\to[0,\infty)$ непрекидна предНорма, имамо да

$$q_e\big(d(x_n x_{n+1})\big)\to 0,\quad n\to\infty$$

односно,

$$d_q(x_n,x_{n-1})\to 0\quad \text{када}\quad n\to\infty ,$$

супротно претпоставци да $d_q(x_n, x_{n-1}) \to L > 0$. Сада према Леми 1. следи да је низ $d(x_n, x_{n-1})$ Кошијев. Значи, Пикаров низ $x_{n+1} = fx_n = f^n x_0$ је Кошијев. Пошто из (2) следи непрекидност пресликавања f то је гранична вредност z низа $\{x_n\}$ и фиксна тачка пресликавања f. Овим је доказ теореме завршен.

Закључак

Користећи својства функционала Minkovskog већина одговарајућих резултата добијених у метричкој поставци остају на снази у tvs конусним метричким просторима (под условом да је у питању солид конус). Дакле, већина конусних метричких резултата добијених недавно може се доказати на лакши начин.

Литература

Аљанчић, С. (1968): *Увод у реалну и функционалну анализу,* Грађевинска књига, Београд.

Amini-Harandi, A., Fakhar, M. (2010): *Fixed point theory in cone metric spaces obtained via the scalarization method,* Computers and Mathematics with Applications, 59, 3529-3534.

Geraghty, M. (1973): *On contractive mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., 40, 604-608.

Djukić, D., Paunović, Lj., Radenović, S. (2011): *Convergence of iterates with error of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in cone metric spaces,* Kragujevac J. Math., 35, 399- 410.

Filipović, M., Paunović, Lj., Radenović S., Rajović, M. (2011**):** *Remarks on Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of T-Kannan Contractive Mappings,* Math. And Computer Modeling, 54, 1467-1472.

Fadail, Z. M., Ahmand, A. G. B, and Paunović, Lj. (2012): *New fixed point results of single-valued mappings for c-distance in cone metric spaces,* Abstract and Applied Analzsis, 12 pages.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. (2011): *A note on equivalence of some metric and cone metric fixed point results,* Applied Math. Letters, 370-374.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. (2009): *Quasi-contraction on a cone metric space,* Appl. Math. Letters, 1674-1679.

Radojević, S., Paunović, Lj., Radenović, S. (2011): *Abstract metric spaces and Hardy-Rogers-type theorems,* Applied Math. Letters, 553-558.

Ракочевић, В. (1994): *Функционална анализа,* Научна књига, Београд.

Ljiljana R. Paunovic, Ph.D.
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

PROOF GERARTHY-TYPE WITH THE ONLY ASUMPTION ABOUT UNEMPTY CONE INTERIOR

Summary: *Geraghty proved in 1973. generalization of Banach basic theorem in terms of complete metric spaces. The corresponding result for the conical spaces was shown in 2010 by Amini-Harandi and Fakhar but only for the solid cone with the base. In this paper, the original proof of the theorem of Geraghty-type with the only one assumption about unempty cone interior. For the proof of the theorem Minkowsky functional is used.*

Key words: cone, tvs cone metric spaces, solid cone, Minkowsky functional.