Зборник радова Учитељског факултета у Призрену – Лепосавић, 5, 2011.

Мр Љиљана Р. Пауновић[18]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ТЕОРЕМЕ О ФИКСНОЈ ТАЧКИ У ПРИДРУЖЕНОМ СИМЕТРИЧНОМ ПРОСТОРУ ДАТОМ КОНУСНОМ МЕТРИЧКОМ ПРОСТОРУ

Апстракт: *Универзалност теорије фиксне (непокретне) тачке исказао је Ђуро Курепа; он сматра да се свако математичко тврђење у извесном смислу може на еквивалентан начин изразити као тврђење о фиксној тачки. Проблематиком фиксне тачке бавили су се многи, између осталих и Ћирић, који је 1971. године доказао теорему о јединствености фиксне тачке када су у питању комплетни метрички простори. Било је интересантно посматрати исти проблем када је придружен симетрични простор датом конусном метричком простору.*
У овом раду формулисана је и доказана теорема о јединствености фиксне тачке за придружени симетрични простор датом конусном метричком простору са нормалним конусом P и нормалном константом $M \geq 1$.

Кључне речи: фиксна тачка, метрички простор, конусни метрички простор, Пикаров низ.

УВОД

Гранични процес један је од најважнијих појмова математичке анализе. Факат на коме почива овај појам јесте да смо у могућности мерити растојање између произвољне две тачке реалне праве. Велики број појмова анализе није везан за алгебарска својства скупа него управо за концепт удаљености. Ово нас наводи на изучавање скупова у којима је могуће мерити растојање између тачака, тј. води нас ка концепту *метричког простора* фундаменталног појма математике.

Француски математичар Морис Фреше (Maurice Frechet) 1906. године објављује докторску дисертацију у којој први пут представља концепт метричких простора, али не под тим именом. Термин „метрички простор“ потиче од немачког математичара Феликса Хаусдорфа (Felix Hausdorff), који

[18] ljiljana.paunovic@pr.ac.rs

се сматра једним од оснивача топологије. Године 1980 (Rzepecki 1980, 179–186) дефинисана је генерализована метрика d_E на скупу X на следећи начин:

$$d_E : X \times X \to P,$$

где је E Банахов простор, P нормалан конус у E са парцијалним уређењем $\leq$. Само неколико година касније уведен је појам K-метричких простора заменом реалних бројева конусом K у метрици функција $d : X \times X \to K$.

Двадесет година после тога, 2007. године, дефинисан је појам конусних метричких простора, мада су они већ постојали под именом K-метрички и K-нормирани простори. У оба случаја скуп реалних бројева замењен је уређеним Банаховим простором E.

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ТВРЂЕЊА

Дефиниција 1: Нека је E реалан Банахов простор. Подскуп P од E назива се *конус* ако је:

1. P затворен, непразан и $P \neq \{\theta\}$;
2. $a, b \in R, \quad a, b \geq 0,$ и $x, y \in P$ следи да је $ax + by \in P$;
3. $P \cap (-P) = \{\theta\}$.

Дефиниција 2: Конус P у Банаховом простору E је *нормалан* ако је:

$$\inf\{\|x+y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0.$$

Дефиниција 3: Нека је X непразан скуп. Претпоставимо да пресликавање $d : X \times X \to E$ задовољава следеће услове:

1. $\theta \leq d(x, y)$ за све $x, y \in X$ и $d(x, y) = \theta$ ако и само ако $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ за све $x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ за све $x, y, z \in X$.

Онда се d назива *конусна метрика* на X а (X, d) је *конусни метрички простор.*

Дефиниција 4: Нека је X непразан скуп. Претпоставимо да пресликавање $d : X \times X \to E$ задовољава следеће услове:

1. $\theta \leq d(x, y)$ за све $x, y \in X$ и $d(x, y) = \theta$ ако и само ако $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ за све $x, y \in X$.

Онда се d назива *конусна симетрија* на X а (X, d) је *конусни симетрични простор.*

За дати конусни симетрични простор (X, d) може се конструисати симетрични простор (X, D) где је симетрија $D : X \times X \to R$ дата са

$D(x,y)=\|d(x,y)\|$. Простор (X,D) назива се *симетричан простор придружен конусном симетричном простору* (X,d).

У случају када је d конусна метрика и основни конус је нормалан, из неједнакости троугла

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y),$$

за све $x,y,z\in X$ следи да симетрија $D(x,y)=\|d(x,y)\|$ задовољава услове

$$D(x,y)=\|d(x,y)\|\le M\|d(x,z)+d(z,y)\|\le M\big(D(x,z)+D(z,y)\big),$$

где је $M\ge 1$ нормална константа у P.

Дефиниција 5: Нека је $f:X\to X$, $x_0\in X$ полазна тачка, онда је са $x_1=fx_0$, $x_2=fx_1=f^2x_0,\ldots,$ $x_n=f^nx_0$ дефинисан низ у скупу X који се зове *Пикаров низ.*

ПРОДУЖЕТАК ЋИРИЋЕВЕ ТЕОРЕМЕ НА ПРИДРУЖЕНЕ СИМЕТРИЧНЕ ПРОСТОРЕ ДАТОМ КОНУСНОМ МЕТРИЧКОМ ПРОСТОРУ

Код Ћирића (Ћирић 1971, 19–26) је формулисана и доказана следећа теорема:

Теорема 1: Нека је (X,d) комплетан метрички простор, нека је f контрактивно пресликавање на X које задовољава:

$$d(fx,fy)\le\lambda\cdot\max\left\{d(x,y),d(fx,x),d(fy,y),\frac{d(fx,y)+d(fy,x)}{2}\right\},\qquad(1)$$

за $\forall x,y\in X$ и $\lambda\in[0,1)$. Тада f има јединствену фиксну тачку $u\in X$.

За $\forall x\in X$ је $u=\lim\limits_{n\to\infty}f^nx.$

Посматрајући овај проблем интересантно је испитати да ли се проблем може продужити на простор (X,D). Формулишимо сада следећу теорему:

Теорема 2: Нека је (X,d) комплетан нормалан конусни метрички простор и $f:X\to X$ пресликавање које задовољава:

$$D(fx,fy)\le\lambda\cdot\max\left\{D(x,y),D(fx,x),D(fy,y),\frac{D(fx,y)+D(fy,x)}{2}\right\},\qquad(2)$$

за $\forall x,y\in X$ и $\lambda\in[0,1)$ где је $D(x,y)=\|d(x,y)\|$. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Доказ: За $M=1$, D је обична метрика и теорема се своди на Ћирићеву. Нека је $M>1$ и $x_0\in X$ полазна тачка. Како је:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0).$$

На овај начин добили смо Пикаров низ. Докажимо да f има јединствену фиксну тачку. Како је (X, d) комплетан, довољно је доказати да је Пикаров низ $\{f^n x\}$ Кошијев.

Да бисмо доказали наведену теорему, потребно је дефинисати и доказати неколико лема.

Скуп $O_r(x;\infty) = \{f^n(x) : n = 0,1,2,\dots\}$ назива се *орбита елемента* x *у односу на* f. За фиксирано n је $O_r(x;n) = \{x, fx, f^2x, \dots, f^n x\}$.

Лема 1: Нека је (X, d) комплетан нормалан конусни метрички простор и $f : X \to X$ пресликавање које задовољава услов (2). Тада за свако $x \in X$

$$i, j \in \{1,2,\dots,n\} \Rightarrow D(f^i x, f^j x) \le \lambda diam\{x, fx, \dots, f^n x\}. \tag{3}$$

Последица 1: Нека је (X, d) комплетан нормалан конусни метрички простор и $f : X \to X$ пресликавање које задовољава услов (2). Тада за свако $n \in N$ постоји $k \in N, k \le n$, тако да је

$$D(x, f^k x) = diam\{x, fx, \dots, f^n x\}. \tag{4}$$

Лема 2: Нека је (X, d) комплетан нормалан конусни метрички простор и $f : X \to X$ пресликавање које задовољава услов (2). Ако је $O_r(x;\infty)$ орбита тачке $x \in X$ у односу на f, онда је

$$diam O_r(x;\infty) \le \frac{M}{1 - \lambda M} D(x, fx), \tag{5}$$

где је $M > 1$ нормална константа и $\lambda < \frac{1}{M}$.

Доказ: За $1 \le i$ и $j \le n$

$$\begin{aligned} D(f^i x, f^j x) &= D(ff^{i-1}x, ff^{j-1}x) \\ &\le \lambda \max\{D(f^{i-1}x, f^{j-1}x), D(f^i x, f^{i-1}x), D(f^j x, f^{j-1}x), \\ &\quad \frac{D(f^i x, f^{j-1}x) + D(f^{i-1}x, f^j x)}{2}\} \\ &\le \lambda diam\{x, fx, \dots, f^n x\}. \end{aligned}$$

Пошто су $f^{i-1}x, f^i x, f^{j-1}x, f^j x \in O_r(x;n)$, то је за $1 \le i, j \le n$

$$D(f^i x, f^j x) \le \lambda diam O_r(x;n) < diam O_r(x;n) \text{ јер је } \lambda < \frac{1}{M}, M > 1. \tag{6}$$

За $k \le n$, $diam O_r(x;n) = D(x, f^k x)$ на основу (3). Из неједнакости

$$d(x, f^k x) \le d(x, fx) + d(fx, f^k x);$$

како је конус нормалан следи

$$\left\| d(x, f^k x) \right\| \le M \left\{ \left\| d(x, fx) + d(fx, f^k x) \right\| \right\}$$

$$\text{тј. } D(x, f^k x) \le MD(x, fx) + MD(fx, f^k x)$$

на основу (3) и (5) је

$$diamO_r(x;n) \le MD(x, fx) + M\lambda diamO_r(x;n)$$
$$(1-\lambda M) diamO_r(x;n) \le MD(x, fx)$$
$$diamO_r(x;n) \le \frac{M}{1-\lambda M} D(x, fx).$$

Лема 3: Нека је (X,d) комплетан нормалан конусни метрички простор и $f: X \to X$ пресликавање које задовољава услов (2). Тада је Пикаров низ $\{f^n x\}$ Кошијев низ у (X,d), при чему је x произвољна тачка у X и $\lambda < \frac{1}{M}$.

Доказ: Нека су $m,n \in N$ и $m > n$. Онда

$$\begin{aligned} D(f^n x, f^m x) &= D(ff^{n-1}x, f^{m-n+1} f^{n-1} x) \\ &\le \lambda diam\{f^{n-1}x, f^n x, \ldots, f^{m-n+1}\} \\ &< diam\{f^{n-1}x, f^n x, \ldots, f^{m-n+1}x\} \\ &= D(f^{n-1}x, f^{k_1} f^{n-1}x), \end{aligned}$$

за неко $k_1 \le m-n+1$. Даље је

$$\begin{aligned} D(f^{n-1}x, f^{k_1} f^{n-1}x) &= D(ff^{n-2}x, f^{k_1+1} f^{n-2}x) \\ &\le \lambda diam\{f^{n-2}x, f^{n-1}x, \ldots, f^{(n-2)+k_1+1}x\} \\ &\le \lambda diam\{f^{n-2}x, f^{n-1}x, \ldots, f^{(n-2)+m-n+2}x\}. \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} D(f^n x, f^m x) &\le \lambda diam\{f^{n-1}x, f^n x, \ldots, f^{m-n+1}x\} \\ &\le \lambda^2 diam\{f^{n-2}x, f^{n-1}x, \ldots, f^{(n-2)+m-n+2}x\}. \end{aligned}$$

На сличан начин добијамо

$$\begin{aligned} D(f^n x, f^m x) &\le \lambda diam\{f^{n-1}x, f^n x, \ldots, f^{m-n+1}x\} \\ &\le \cdots \le \lambda^n diam\{x, fx, \ldots, f^m x\}. \end{aligned}$$

Применом Леме 2 добијамо

$$D(f^n x, f^m x) \le \frac{\lambda^n M}{1-\lambda M} D(x, fx). \tag{7}$$

Ако у (7) пустимо да $n \to \infty$, добијамо да је $D(f^n x, f^m x) = 0$, што значи да је низ $\{f^n x\}$ Кошијев.

Лема 4: Нека је (X,d) комплетан нормалан конусни метрички простор и $f : X \to X$ пресликавање које задовољава услов (2). Ако за неку тачку $x \in X$ Пикаров низ $\{f^n x\}$ конвергира тачки $p \in X$, онда је p фиксна тачка функције f при чему је $\lambda < \frac{1}{M^2}$.

Доказ:

$$D(p, fp) \leq MD(p, f^{n+1}x) + MD(f^{n+1}x, fp)$$
$$\leq MD(p, f^{n+1}x) + \lambda M \max\{D(f^n x, p), D(f^{n+1}x, f^n x),$$
$$D(fp, p), \frac{D(f^{n+1}x, p) + D(f^n x, fp)}{2}\}.$$

Ако пустимо да $n \to \infty$, у претходној неједнакости добијамо

$$D(p, fp) \leq M \cdot 0 + \lambda \cdot M \max\{0, 0, D(p, fp), \frac{M \cdot (0 + D(p, fp))}{2}\} = \lambda M^2 D(p, fp),$$

јер је $D(f^n x, fp) \leq M\{D(f^n x, p) + D(p, fp)\}$.

Сада је $D(p, fp)(1 - \lambda M^2) \leq 0$, како је $(1 - \lambda M^2) \neq 0$ јер је

$$\lambda < \frac{1}{M^2} \Rightarrow D(p, fp) = 0 \Rightarrow fp = p.$$

Доказ Теореме 2: Нека је $x \in X$ произвољна тачка. Помоћу Леме 3 доказали смо да је Пикаров низ $\{f^n x\}$ Кошијев низ. Како је (X,d) комплетан конусни метрички простор, то значи да дати низ конвергира некој тачки $p \in X$. Применом Леме 4 доказано је да је p фиксна тачка функције f.

Докажимо још јединственост фиксне тачке. Нека је $q \in X$ друга фиксна тачка; тада је

$$D(p,q) = D(fp, fq) \leq \lambda \max\left\{D(p,q), D(fp,p), D(fq,q), \frac{D(fp,q) + D(p,fq)}{2}\right\}$$
$$\leq \lambda \max\left\{D(p,q), 0, 0, \frac{MD(fp,p) + MD(p,q) + MD(fq,q) + MD(q,p)}{2}\right\}$$
$$\leq \lambda \max\left\{D(p,q), 0, 0, \frac{0 + MD(p,q) + 0 + MD(q,p)}{2}\right\}$$
$$\leq \lambda \max\{D(p,q), MD(p,q)\} = \lambda MD(p,q).$$

Сада је $D(p,q)(1 - \lambda M) \leq 0$, како је $(1 - \lambda M) \neq 0 \Rightarrow D(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$.

Овим је доказана јединственост фиксне тачке.

ЗАКЉУЧАК

Формулисањем и доказивањем Теореме 2 доказали смо да се проблем фиксне тачке може посматрати како у комплетном метричком простору тако и у комплетном нормалном конусном метричком простору.

Иако уведена и у неким аспектима разматрана већ средином прошлог века, у три различите руске школе, област конусних (апстрактних) метричких простора узела је нови замах 2007. године, после њенога поновног увођења од стране кинеских математичара Huang Long-Guanga и Zhang Xiana. Сада, са новим приступом у коришћењу конуса у уређеном Банаховом простору, отворене су нове могућности за разматрање разних врста векторских контрактивних пресликавања.

О значај ове области сведочи и импозантан број (преко 90) радова објављених после 2007. године.

ЛИТЕРАТУРА

Аљанчић, С. (1968), *Увод у реалну и функционалну анализу,* Грађевинска књига, Београд.

Ćirić, Lj. (2003), *Some recent results in metrical fixed point theory,* Mašinski fakultet, Beograd.

Filipović, M., Paunović, Lj., Radenović S., Rajović, M. (2011), Remarks on Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of T-Kannan Contractive Mappings, *Math. and Computer Modeling*, 54, 1467–1472.

Huang, L. G., Yhang, X. (2007), Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mapings, *J. Math. Anal. Appl.*, 332, 1468–1476.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. (2011), A note on equivalence of some metric and cone metric fixed point results, *Applied Math. Letters*, 370–374.

Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V. (2009), Quasi-contraction on a cone metric space, *Appl. Math. Letters*, 1674–1679.

Rzepecki, B. (1980), On fixed point theorems of Maia type, *Publications de l'institut mathematique*, Nouvelle serie, 42, 179–186.

Radojević, S., Paunović, Lj., Radenović, S. (2011), Abstract metric spaces and Hardy-Rogers-type theorems, *Applied Math. Letters*, 553–558.

Ракочевић, В. (1994), *Функционална анализа,* Научна књига, Београд.

Paunovic Ljiljana, MA
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

THEOREMS ON FIXED POINT IN ADDITIONAL SYMMETRICAL SPACE TO GIVEN CONUS METRIC SPACE

Summary: *Universality of the theory of fixed point has already been expressed by Djuro Kurepa, who considered that any mathematical assertion can in certain sense be in an equivalent way expressed as assertion on fixed point.*
The problem of fixed point has been dealt with by many mathematicians, Ciric among others, who in 1971 proved the theorem on uniqueness of fixed point when complete metric space is in question. It was interesting to consider the same problem, but this time, when an additional symmetrical space to given cone metric space is in question.
In this paper, theorem on uniqueness of fixed point for additional symmetrical space to given cone metric space with normal cone P and normal constant $M \geq 1$ is formulated and proved.

Key words: fixed point, metric space, cone metric space, Pikaro`s sequence.