Зборник радова Учитељског факултета у Призрену – Лепосавић, 5, 2011.

Доц. др Ваит Д. Ибро[17]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ЕЛЕМЕНТИ КОМБИНАТОРИКЕ, ВЕРОВАТНОЋЕ И МАТЕМАТИЧКЕ СТАТИСТИКЕ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Апстракт: *Физичке појаве су, кроз историју, разматране и схватане детерминистички. То значи да су научни закони исказивани на начин да остваривање одређених услова доводи, једнозначно, до одређених резултата. С друге стране, остваривање одређених услова не мора увек доводити до истих резултата, што значи да постоје и недетерминистичке, случајне појаве и случајни догађаји. Ти догађаји могу бити сигурни, немогући и случајни. Они су у животу и друштву масовни. Међутим, у настави, па и у настави математике, те појаве и математичке моделе за њихово изучавање скривамо од ученика с којима радимо.*

Рад има за циљ да укаже на аспекте осавремењавања почетне наставе математике у односу на појмове и моделе случајних догађаја – на вероватноћу, комбинаторику и статистику.

Кључне речи: настава математике, комбинаторика, вероватноћа, статистика.

УВОД

Данас су у свету уочљиве интензивне научне активности на плану модернизације и унапређивања образовања. То је резултат револуционарних открића човечанства у многим областима, пре свега у подручјима интердисциплинарних наука. Нова цивилизацијска епоха условљава и нову концепцију система образовања у смислу технологије, али и свих других његових елемената.

Вероватноћа, комбинаторика и статистика имају све већи значај не само као посебне, самосталне гране теоријске математике, већ и као веома успешан истраживачки метод у многим другим научним подручјима: астрономији, биологији, техници, економији, психологији, итд. Употреба рачуна вероватноће проистиче првенствено из његове повезаности са

[17] vajtgora@gmail.com

комбинаториком и статистиком, чије се теоријске основе заснивају на његовим законима.

КРАТАК ИСТОРИЈАТ

Математичка дисциплина која се бави проучавањем законитости случајних појава назива се теорија вероватноће а почела се развијати у 16. веку. Случајност се јасно одражавала на играма на срећу, које људи познају од давнина, па су зато биле погодне за изучавање случајних појава. Прва књига из ове области је *Књига о хазардним играма* коју је написао италијански математичар, Кардано (Gerolamo Cardano, 1501–1576), а штмпана је 1663. године – сто година пошто је написана. Треба нагласити да је теорија вероватноће настала из практичних потреба, а игре на срећу су утицале на њено формирање и развој.

Касније, под утицајем математичарâ Паскала (Blaise Paskal, 1623–1662), Ферма (Pierra de Fermat, 1601–1665) и Хајгенса (Christiaan Huygens, 1629–1697), она се развија као наука у коју је појам вероватноће уведен као однос бројева повољних случајева и свих могућих случајева датог експеримента. Савремени развој и третирање ове теорије као математичке дисциплине почиње 1933. године, под утицајем руског математичара Колмогорова (Андрей Николаевич Колмогоров, 1903–1987). Данас она има широку примену у природним и друштвеним наукама, на пример, у теорији поузданости, теорији система, теорији аутоматског управљања итд. (Petrović 2003).

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

За потребе рада потребно је дефинисати основне појмове из вероватноће, комбинаторике и математичке статистике, да би се квалитетније схватили аспекти осавремењавања и методичког обликовања почетне наставе математике садржајима из наведених области.

Елементи комбинаторике

Комбинаторика је грана математике која се бави изучавањем одабира и распореда елемената коначних скупова, а пре свега бројем тих распореда. Такође, њен предмет чини и груписање одређених подскупова датог скупа, распоредом елемената у њима, као и број тих груписања и распореда.

Када је дат један коначан скуп елемената $E = \{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$, онда има више могућности да се од тих елемената, нижући их на разне начине, добију неки нови скупови. При томе је нарочито важно колико ће чланова имати ти нови скупови, и како ће тачно, у општем случају, број чланова тог новог скупа зависити од броја елемената полазног скупа.

Нека је дат скуп $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ од n елемената. Низ од *к* $(1 \leq k \leq n)$ различитих чланова који су елементи скупа Е називамо **варијацијом скупа Е класе к** ($V_k^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)$).

Пример: Колико има троцифрених бројева са различитим цифрама, који се могу образовати од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Број елемената је n = 5, класа је к = 3, па је $V_3^5 = 5(5-1)(5-3+1) = 5\cdot4\cdot3 = 60$.

У случају k = n, варијацију класе n скупа Е називамо **пермутацијом скупа Е** ($P_n = n!$)**.**

Пример: Колико четвороцифрених бројева може да се формира од цифара: 3, 4, 7, 8, 9.

У питању су пермутације од пет елемената, па је: $P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$.

Нека је дат скуп $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ од n елемената. Подскуп од *k* $(1 \leq k \leq n)$ елемената скупа Е називамо **комбинацијом класе k од n елемената** ($C_k^n = V_k^n/k! = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k!$) (Обрадовић 2006)**.**

Пример: У кутији се налази 10 куглица нумерисаних бројевима 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10. Истовремено се извлаче по 3 куглице. Колико различитих резултата извлачења може бити?

Реч је о комбинацијама треће класе од 10 елемената, па је укупан број извлачења:

$C_3^{10} = V_3^{10}/3! = (10\cdot9\cdot8)/(1\cdot2\cdot3) = 120$ (Обрадовић 2006).

Елементи теорије вероватноће

За проучавање законитости случајних појава основни појам је *случајни експеримент* који се под приближно истим условима може понављати неограничен број пута, и чији се исход не може са сигурношћу предвидети. Једноставније, појам експеримента треба схватити као низ радњи, поступака, да би се дошло до неких закључака. Исто тако, то су ситуације у којима се не обавља никакав стварни експеримент, већ само посматрање.

Случајни или *стохастички експеримент* је експеримент који има следеће особине:

а) унапред је прецизирано шта се региструје у експерименту и познат је скуп свих могућих исхода експеримента,

б) исход сваког појединачног експеримента није унапред познат,

в) експеримент се може понављати произвољан број пута у неизмењеним условима.

Пример: Типичан експеримент је бацање коцке за игру, чије су стране нумерисане бројевима од 1 до 6 и у коме се региструје број на горњој страни коцке.

Скуп свих могућих исхода или резултата неког случајног експеримента назива се *простор елементарних догађаја* и означава се са Ω, а његови елементи, тј. поједини елементарни догађаји или исходи са ω. Скуп Ω називамо *сигуран догађај*, док догађај који се у експерименту не може остварити називамо *немогућ догађај*, у ознаци Ø.

Пример: Експеримент – бацање коцке чије су стране нумерисане бројевима од 1 до 6.

1. Елементарни догађаји су: ω_1 – појављивање броја 1, ω_2 – појављивање броја 2, ω_3 – појављивање броја 3, ω_4 – појављивање броја 4, ω_5 – појављивање броја 5, ω_6 – појављивање броја 6.
2. Сигуран догађај је скуп $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ (При реализацији експеримента сигурно се појављује један од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6).
3. Немогућ догађај у овом експерименту је, рецимо, појављивање броја 8.

За потребе рада дајемо само врсте дефиниција вероватноће које су се историјски појављивале пре аксиоматског увођења функције вероватноће. Нека означимо *вероватноћу* догађаја A са P(A).

1. *Статистичка дефиниција вероватноће*. Нека је у експерименту дат случајан догађај A. Ако се у $n \varepsilon N$ понављања наведеног експеримента догађај A догодио m пута, тада:
   – број m називамо *фреквенцијом*, у ознаци *m(A)*
   – број *m/n* називамо *релативном фреквенцијом*, у ознаци *ω(A)*.

Пример: У 12 бацања коцке број 2 се појави 3 пута. Тада је:
– фреквенција m(A) = 3,
– релативна фреквенција ω(A) = 3/12 = 1/4 = 0,25.

2. *Класична дефиниција вероватноће*. Ова дефиниција односи се само на експеримент чији је простор елементараних догађаја коначан, а елементарни догађаји су једнако вероватни. За догађај A сваки исход, при коме се остварује догађај A, назива се *повољан*.

Нека има *n* елементарних догађаја у експерименту, а *m* повољних исхода за догађај A. Тада је

$P(A) = m/n$

или речима: вероватноћа догађаја A једнака је количнику броја повољних и броја могућих исхода.

Пример: Експеримент је једно бацање коцке. Колика је вероватноћа догађаја A ако је:
– A – пао је број 4.
– A – пао је број већи од 2.

За дати експеримент имамо n = 6 могућих исхода.
– повољни исход је само један, тј. m = 1, па је
P(A) = m/n = 1/6 = 0,666...
– повољни исход је да су пали бројеви 3, 4, 5 или 6. Тада је m = 4, па је

$P(A) = m/n = 4/6 = 0,666\ldots$

3. *Геометријска дефиниција вероватноће*. Вероватноћа представља количник површина (запремина или дужина) повољних и могућих исхода. Пошто ова дефиниција превазилази потребе овог рада, само је помињемо – као могућност за многа истраживања у свим сферама друштвеног живота (Petojević 2005).

Елементи математичке статистике

Предмет изучавања математичке статистике су масовне појаве у природи и друштву, тј. појаве које се испољавају на великом броју објеката исте врсте. Полази се од једног скупа Е, са великим бројем елемената, и посматра се нека заједничка особина тих елемената, који се за сваки елеменат изражава одређеним бројем. Скуп Е назива се **популацијом**, **генералним скупом, основним скупом** или **статистичком масом,** а његови елементи **статистичком јединицом.** Важно је напоменути да се у оквиру исте популације може посматрати и више обележја истовремено.

Пример: Популација може бити целокупно становништво једне државе, а обележја: старост, доходак, вредност имовине, висина, степен образовања итд.

Основни задатак математичке статистике јесте одређивање расподеле фреквенција посматраног облежја, што значи утврдити колико често се поједине вредности тога обележја јављају у популацији. Због практичности, из популације се издваја један коначан подскуп, који се назива **узорком**, и региструју се вредности обележја на његовим елементима, па се на основу тога изводе закључци о расподели фреквенција обележја на читавој популацији. Број елемената узорка назива се **обим** узорка.

Закључци о расподели фреквенције обележја добијени на основу узорка нису сасвим поуздани, већ само више или мање вероватни. Зато узорак треба бирати тако да се обезбеди довољна поузданост закључака добијених помоћу њега, тј. да узорак довољно добро представља целу популацију, да буде **репрезентативан** (Обрадовић 2006).

КАКО НАВЕДЕНЕ САДРЖАЈЕ УКЉУЧИТИ У ПОЧЕТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ

Настава математике, с обзиром на одређене друштвене циљеве и задатке, чини посебан систем по садржајима, приступу, методама и терминологији. Изузетно широка примена у многим областима људског рада и посебна улога наставе математике у развијању пре свега интелектуалних способности, чине је једним од најзначајнијих наставних предмета у општем образовању и васпитању. Она доприноси развијању способности посматрања, логичког и стваралачког мишљења.

Данашњи, актуелни програм наставе математике у општем образовању састоји се од класичних садржаја. У њему нема појмова и модела случајних догађаја као ни информатичких садржаја. У одређеном смислу уважава се моделски приступ приликом оперативног структурисања реалног света помоћу математичких модела. Зато се поставља питање довољности садржаја почетне наставе математике за схватање разних појава и законитости у животу и друштву (Пинтер и др. 2002). Овде се мисли на појмове и моделе случајних догађаја, односно на комбинаторику, вероватноћу и математичку статистику. Искуства и истраживања у развијенијим земљама потврђују да има места за обраду ових садржаја у почетној настави математике. Реализација садашње почетне наставе математике показује да има елемената логике и комбинаторике, али се они занемарују због неадекватног нивоа и сложености. Важно је нагласити да општи приступ почетној настави математике представља основу за реализацију идеја почетне наставе комбинаторике, па и вероватноће, као и математичке статистике.

Знајући да се почетна настава математике заснива на конкретним активностима, игри, интуицији и доживљавању конкретних операција, та искуства солидна су основа за сазревање схватања и примену апстрактних математичких појмова и модела.

Комбинаторика

Елементи комбинаторике у почетној настави математике нису експлицитно присутни али се већ у првом разреду сусрећемо са распоредом предмета, или неког другог дидактичког материјала кроз игру, чиме формирамо пермутације. Уочавањем и одређивањем подскупова од три, четири или више елемената формирамо комбинације. Исто тако, кроз игру, у другом разреду, формирају се уређени скупови (пермутације), подскупови (комбинације) и уређени подскупови (варијације). У трећем разреду користимо комбинаторне задатке. Они се односе на изналажење недостајућих случајева на основу одређеног система формирања нових подскупова, као и одређивање броја правих и равни кроз дати број тачака. Садржаји у четвртом разреду обухватају изналажење свих могућности у комбинаторним задацима, црта се дрво догађаја и користе таблице. Игру треба користити за процену резултата комбинаторних задатака. Важно је напоменути да на овом нивоу није предвиђено коришћење формула.

Комбинаторни задаци, предложени у почетној настави математике, имају практичну примену а чине и реалну основу за решавање сложенијих. Они су повезани и са психофизичким способностима ученика, односно, недовољне способности апстрактног мишљења, па значајно доприносе развијању комбинаторне фантазије. Због тога, систем вежбања таквих задатака треба да обезбеди постепени прелазак од манипулисања предметима ка мишљењу.

Вероватноћа

Живот људи састоји се од појава случајног карактера. Такви догађаји имају велику улогу у науци, техници и економији. Зато је неопходно имати представу о основним методама изучавања ових појмова. Почетна настава математике морала би тим питањима приступати на посебан методички начин.

Кроз игру се, у првом разреду, могу уочавати и доживљавати сигурни, немогући, неизвесни и случајни догађаји, без њихове градације. У другом разреду може се вршити њихова градација на: изненађујуће, ретке, мало вероватне, вероватне и скоро сигурне догађаје. То се постиже преко скупова који имају једнаки број елемената, процењивањем и провером резултата. Након тога, у трећем разреду, врше се експерименти реализације неког догађаја, градација и процена његове вероватноће. Ученици четвртог разреда већ могу систематски бележити резултат експеримента који се реализује кроз игру са коцкама, новчићима и другим дидактичким материјалом. Они евидентирају учесталост случајних догађаја, а резултате приказују дијаграмом и табеларно. Упоређујући учесталост појављивања догађаја код једног, затим код различитог броја елемената посматраног скупа догађаја, утврђује се вероватноћа датог догађаја.

Овакви садржаји имају значајан васпитни ефекат, ученицима пружају један моћан математички модел за упознавање, испитивање и схватање случајних појава.

Статистика

Елементи статистике у почетној настави математике такође нису експлицитно дати, али свако сређивање података, формирање таблица, графикона и сл., подразумева појмове математичке статистике.

Ученици у првом разреду могу прикупљати различите податке из своје животне средине, сређивати их и формирати таблице. У другом разреду статистичко посматрање се проширује на реалне појаве и експерименте – игре. Паралелно са посматрањем појаве, бележе се, групишу, сређују, цртају графикони и формирају табеле. Ученици треба да науче и обрнути поступак, тј. да знају да читају резултате са табеле и графикона. Такође, посматрајући појаву или експеримент утврђују број, највећи и најмањи елеменат, и њихов распоред. У трећем разреду треба проширити статистичко проучавање и увести појам средњег елемента (медијане), средњу вредност и аритметичку средину две величине. Садржаји за четврти разред предвиђају проширивање и продубљивање знања и умења. Статистичке табеле и графикони као и остала обележја појаве или експеримента, примамљиви су и корисни и у другим наставним предметима, као и у реалном животу.

На основу изложеног можемо рећи да је неопходно да елементи комбинаторике, вероватноће и математичке статистике нађу своје место у почетној настави математике. То подразумева посебан методички приступ у дефинисању појава. Стохастичке појаве у основној школи представљају се преко елемената комбинаторике, теорије графова, статистике и вероватноће. Ова изучавања тесно су повезана са формирањем, код ученика, комбинаторних способности, појмова вероватноће (могућ, сигуран, немогућ догађај) и основа статистичке културе. Основу за решавање задатака вероватноће представљају комбинаторни задаци. Применом тих задатака доприноси се проширивању знања о задацима и новим методама решавања, формирању умећа прихватања реално могућег решења и развијања елемената стваралачке делатности. Такви наставни садржаји доприносе развоју везе унутар предмета и међу предметима (математика, природа), допуштају остваривање и примену математике и код ученика формирају поглед на свет. Зато је врло важно формирати стохастичку културу, развити интуитивну вероватноћу и комбинаторне способности деце од ране младости.

ЗАКЉУЧАК

Увођење елемената комбинаторике, вероватноће и математичке статистике у почетну наставу математике имало би значајних ефеката у образовању, практичној примени и васпитању. Знања и умења која су потребна за разумевање случајних појава имају своју примену у схватању појава и законитости у животу и друштву. Такви садржаји могу се успешно реализовати применом одговарајућих методичких решења, чиме се доприноси остваривању циљева и задатака почетне наставе математике. Исто тако, та знања помажу да ученици схвате појаве, случајне и масовне догађаје, статистичке појаве и законитости у друштву. Математизацијом реалног живота, развојем комбинаторног и логичког мишљења доприноси се формирању научног погледа на свет и развоју личности ученика. Зато је потребно истражити све значајне елементе ефеката увођења ових садржаја у почетну наставу математике.

ЛИТЕРАТУРА

Petojević, Aleksandar (2005), *Matematika*, Učiteljski fakultet u Somboru, Sombor.

Vadnal, Alojzil (1963), *Elementarni uvod u račun verovatnoće*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd.

Pinter, Janoš, N., P., V., S., D., L. (1996), *Opšta metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet u Somboru, Sombor.

Пинтер, Јанош, В., К., А., Ђ. (2002), *Методички приручник из математике – за разредну наставу*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Petrović, Ljiljana (2003), *Teorija verovatnoća*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd.

Обрадовић, Милутин, Д., Г. (2006), *Математика за IV разред средње школе*, Завод за уџбенике и настава средства, Београд.

Ibro D.Vait, Ph.D., University Senior Lecturer
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

ELEMENTS OF COMBINATORICS, PROBABILITY AND STATISTICS IN THE INITIAL MATHEMITCS INSTRUCTION

Summary: *We used to observe and understand natural phenomena in a deterministic way throughout history. This means that scientific laws were defined in a manner where fulfillment of certain conditions deliberately led to predefined results. On the other hand, in practice one can observe phenomena where fulfillment of certain conditions doesn't always lead to the same results, which means that there are nondeterministic – stochastic phenomena and random events. The events can be: certain, impossible and the random ones. Such events appear in daily life on a massive scale. However, in mathematics instruction we tend to deprive our students of exploring such phenomena and mathematical models that describe the phenomena.*
The goal of the article is to point at some aspects of modernizing initial mathematics instruction in regard with basic ideas and models of random events i. e. with combinatorial, probability and statistics.

Key words: mathematics instruction, combinatorial, probability, statistics