Проф. др Алија Мандак
Учитељски факултет, Лепосавић

СТРУКТУРЕ ИНЦИДЕНЦИЈЕ

Апстракт*: Познато је да t-дизајни представљају уопштење заједничких особина коначних афиних и пројективних равни. У раду се дефинише општа структура инциденције и испитују неке њене комбинаторне особине. Дефинишу се и проучавају неке од најважнијих структура инциденције : пројективне равни, n- димензионални афини и пројективни простори и блок дизајни.*

Кључне речи: структура инциденције, афине равни, пројективна раван, блок дизајн, изоморфизам

Структура инциденције је тројка D=(V, B, I) где су V и B било која два дисјунктна скупа и I бинарна релација између V и B тј. $I \subseteq V \times B$. Елементи скупа V зову се тачке а скупа B блокови. Уместо $(P, b) \in I$ пише се просто P I b или $P \in b$ и каже се "тачка P припада блоку b", "P и b су инцидентни", "блок b пролази кроз P" итд. Ако су V и B коначни скупови онда се D зове коначна структура инциденције.

Ако је P било која тачка онда (P) означава скуп блокова кроз P тј.

$$(P) = \{\ b \mid b \in B,\ PIb\ \},$$

слично се узима да је

$$(b) = \{\ P \mid P \in V,\ PI\, b\ \},$$

за било који блок $b \in B$. Може се десити да различити блокови буду инцидентни са истим скупом тачака. Ми ћемо посматрати инцидентне структуре где различити блокови садрже различите скупове тачака. За ове структуре ми ћемо идентификовати сваки блок b са одговарајућим скупом тачака (b) и релацију инциденције I са обичном релацијом $\in$. Број | (b)| зове се степен блока b, слично | (P) | зове се степен тачке P.

1. Став. Ако постоји структура инциденције са степенима тачака r_1, ..., r_v и степенима блокова k_1, ….., k_b tada

$$\sum_{i=1}^{v} r_i = \sum_{j=1}^{b} k_j$$

Доказ. Ми рачунамо све парове (P_i, B_j) где P_i I B_j на два начина. Користећи чињеницу да је i- та тачка на тачно r_i блокова добија се да је укупан број парова (P_i, B_j) једнак $\sum_{i=1}^{v} r_i$. Слично, пошто j- ти блок B_j садржи тачно k_j тачака добија се да је укупан број парова (P_i, B_j) једнак $\sum_{j=1}^{b} k_j$. Тиме је став доказан.

2. Последица. Ако су сви степени тачака једнаки r, сви степени блокова једнаки k онда

$$vr = bk$$

где је v-број тачака а b број блокова.

3. Дефиниција. Структура инциденције D=(V, B, $\in$) зове се афина равни акко важе следеће аксиоме:

i) кроз било које две тачке пролази јединствена права;

ii) За било коју тачку P и праву l која не садржи P постоји тачно једна права h која садржи P а не сече l;

iii) Постоје три тачке које не припадају једној правој.

За праве l и h каже се да су паралалне. Релација паралелности је еквивалентност скупа B.

Ако је D коначна афина раван онда постоји природан број n(зове се реде равни D) који испуњава:

$$| (P) | = n+1 \qquad \text{за све тачке } P;$$
$$| (l) | = n \qquad \text{за све праве } l;$$
$$|V| = n^2 \,;\; |B| = n^2 + n.$$

4. Дефиниција. Структура инциденције D=(V, B, $\in$) зове се пројективна раван акко важе следеће аксиоме:

i) Кроз било које две тачке пролази јединствена права;

ii) Било које две праве секу се у јединствној тачки;

iii) Постоје четири тачке од којих било које три не припадају једној правој.

Ако је D=(V, B, $\in$) коначна пројективна раван онда постоји природан број n (зове се ред равни D) који испуњава:

i) $|(P)| = |(l)| = n+1$ за све $P \in V$ и $l \in B$;

ii) $|V| = |B| = n^2 + n+1$

Нека $D=(V, B, \in)$ буде пројективна раван и l произвољна права. Подструктура

$$D_l = (V \setminus (l), B \setminus \{l\}, \in)$$

је афина раван. Свака афина раван може се добити од пројективне равни изостављањем једне праве. У коначном случају D и D_l имају исти ред. Обратно, из дате афине равни може се добити пројективна раван прошираваењем скупа тачака бесконачним тачкама као пресецима паралелних правих и проширивањем скупа блокова бесконачним блоком који садржи све бесконачне тачке.

Нека је V n- димензионалан векторски простор над пољем F и l потпростор простора V. За било коју тачку $A \in V$ скуп.

$$A + l = \{ A + X \mid X \in l \}$$

зове се линеарна многострукост потпростора l.

Нека је F поље Галуа (Galois) са q елемената (q је степен простог броја) и V векторски простор димензије 2 над F. Ако за тачке узмемо све векторе, за праве линеарне многострукости једнодимензионалних потпростора добија се афина раван реда q.

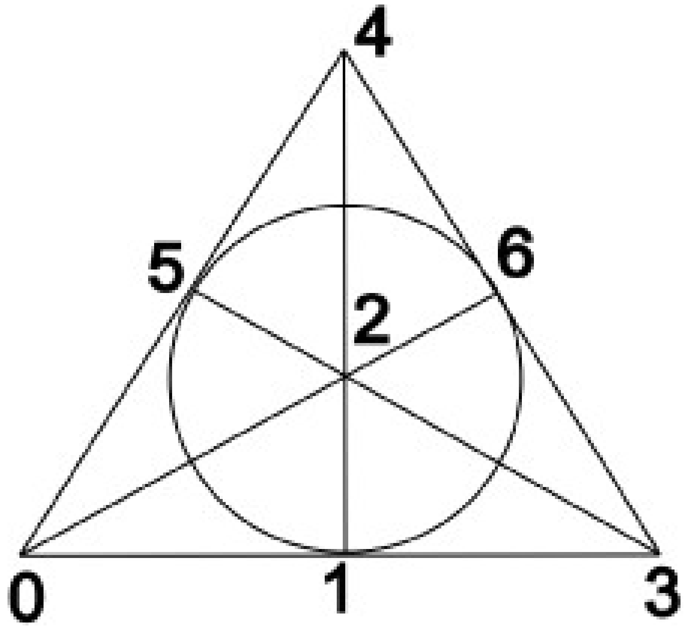
Дакле важи:

5. Став. За сваки степен простог броја $q=p^m$ постоји афина раван реда q.

Нека је F поље Галуа (Galois) са q елемената (q је степен простог броја) V векторски простор димензије 3 над F. Ако за тачке узмемо све једнодимензионалне потпросторе, за праве све дводимензионалне потпросторе добија се пројектовна раван реда q. Заиста, аксиоме (3, i) и (3, ii) очигледно важе. За (3, iii) можемо изабрати тачке $\{ \lambda e_1 \mid e_1 \in V \}$, $\{ \lambda e_2 \mid e_2 \in V \}$, $\{ \lambda e_3 \mid e_3 \in V \}$, $\{ \lambda(e_1 + e_2 + e_3) \mid e_1, e_2\ e_3, \in V \}$ где је (e): e_1, e_2 e_3 произвољн база простора V. Остаје доказати да ова пројектовна раван има ред q. Број једнодимензионалних потпростора простора V је

$$(q^3-1) / q-1 = q^2+q+1.$$

6. Пример. Нека је $V = \{ 0, ..., 6 \}$, скуп тачака, B = $\{\{$ 0,1,3 $\}$, $\{$ 1,2,4 $\}$, $\{$ 2,3,5 $\}$, $\{$ 3,4,6 $\}$, $\{$ 4,5,0 $\}$, $\{$ 5,6,1 $\}$, $\{$ 6,0,2 $\}\}$ скуп блокова и релација инциденције обична релација $\in$. (Сл. 1). Добија се пројектовна раван реда 2. То је најмањи могући ред пројективне равни. Ова пројктовна раван има 7 тачака, 7 правих, свака тачка је на 3 праве, свака права садржи три тачке.



Сл. 1

До сада није конструисана ниједна афина (пројективна) раван чији ред није степен простог броја. Има мало резултата који дају услове за евентуалну егзистенцију таквих равни. Ти резултати, углавном одређују природне бројеве који не могу бити редови коначних афиних (пројектованих) равни. За остале природне бројеве ово питање је отворено. Године 1900. Тари (Tarri) је доказао да раван реда 6 не постоји. То је био једини резултат све до 1949. године када су Брак и Рејзер (Bruck, Ryzer) доказали чувену теорему која негира постојање равни одређених редова.

7. Теорема. (Bruck, Ryzer) Ако је $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ и ако се n не може представити у виду збира квадрата два цела броја тада раван реда n не постоји.[1]

[1] BETH T., JUNGNICKEL D., LENZ H., (1985) *Desing theory,* Manheim- Wien – Zurich,str. 100.

Питање егзистенције пројектованих равни реда n је отворено за n=12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, ... За n=6, 14, 21, 22, 30, 33,

38, ... не постоји пројектовна раван реда n.

Следећа дефиниција уопштава заједничке комбинаторне карактеристике коначних афиних и пројективних равни.

8. Дефиниција. Коначна структура инциденције D=(V, B, $\in$) зове се блок дизајн са параметрима v, k, λ (v, k, $\lambda \in N$), ако испуњава следеће услове:

i)| V | = v

ii)| (P,Q) | = λ за све $\{ P, Q \} \subseteq V$ тј. било које две различите тачке су спојене са тачно λ - блокова;

iii) | (l) | = k за било који блок l.

Блок дизајн са параметрима v, k, λ обележава се са S_λ (2, k; v), за λ=1 просто S (2, k, v).

Пројективна раван реда n је S(2, n+1, n^2+n+1); афина раван реда n је S(1, n, n^2). Ово су једини примери блок дизајна са овим параметрима.

Нека D буде S_λ (2, k; v). Тада важи:

$$| (P) | = \lambda \frac{v-1}{k-1} = r;$$

$$| (B) | = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = b.$$

Ако се у дефиницији 8 услов ii) замени са:

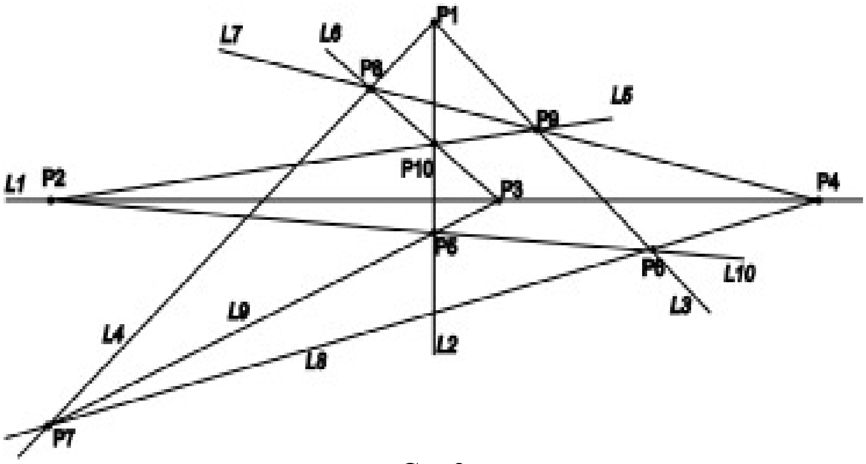
ii)$'$ Било које t различите тачке су спојене са тачно λ- блокова; онда структура инциденције се зове t- дизајн и обележава се са S_λ (t, k; v). За λ= 1, S (t, k, v) зове се Штајнеров (Steiner) систем; S (2, 3, v) зове се Штајнеров тростуки систем; S (2, 4, v) зове се Штајнеров четвороструки систем.

Било који t- дизајн S_r (t, k; v) зове се тактичка конфигурација. Конфигурација са параметрима v = b = 10, r = k =3 и инциденцијом (сл. 2)

$$V = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10} \}$$

$$B = \{ l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10} \}$$

зове се Дезаргова конфигурација. Геометријска важност ове конфигурације је следећа. Пројективна раван је изоморфна са пројективном равни конструисаном над пољем (не мора комутативним) ако и само ако за било која два троугла P_5 P_6 P_7 и $P_8P_9P_{10}$ који су перспективни из тачке P_1 пресечне тачке одговарајућих страница су на заједничкој правој l_1.



Сл. 2

Нека је F поље и V n- димензионалан векторски простор над F. Скуп свих линеарних многострукости подпростора простора V уређених инклузијом зове се n- димензионалан афин простор над F. Ако је GF(q) поље Галуа (Galois) са q-елемената онда се овај простор обележава са AG(n,q). Линеарне многострукости потпростора $\{\ 0\ \}$ зову се тачке, једнодимензионалних потпростора праве, дводимензионалних потпростора равни; линеарне многострукости (n-1) – димензионалних потпростора зову се хиперравни. Уопште, линеарне многострукости i- димензионалних потпростора зову се i – равни. Тачке простора AG(n,q) заједно са d-равнима као блоковима и инциденцијом природним припадањем формирају структуру инциденције $AG_d(n,q)$.

9. Лема. Нека је q прост степен и n и d позитивни цели бројеви, d ≤ n, $[{n \atop d}]_q$ број d- димензионалних потпростора n- димензионалног простора над GF(q). Тада

$$[{n \atop d}]_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1).....(q^{n-d+1}-1)}{(q^d-1)(q^{d-1}-1).....(q-1)}$$

($[{n \atop d}]_q$ зову се Гаусови коефицијенти).

Доказ. Нека је V n- димензионалан векторски простор над GF(q). Број уређених d – торки (e): e_1, e_2, ….., e_d линерано независних вектора простора V је

$$(q^n-1)(q^n-q) \dots (q^n-q^{d-1})$$

Нека је (e): e_1, e_2, ….., e_d, произвољна база потпростора U. Вектор e_1 може бити било који ненула вектор из V, тј. он се може изабрати на q^n-1 начина. За e_2 може се узети било који вектор који не припада једнодимензионалном потпростору $\{ de_1 \mid d \in F \}$. Како овај потпростор има q- елемената, то се e_2 може бирати на q^n-q начина. Сличним расуђивањем закључујемо да се e_d може бирати на q^n-q^{d-1} начина.

Свака d – торка линерано независних вектора дефинише d-димензионални потпростор U простора V. Сваки такав d- димензионални потпростор U дефинисан је са $(q^n-1)(q^n-q) \dots (q^n-q^{d-1})$ d- торки линеарно независних вектора. Тиме је Лема доказана.

10. Теорема. $AG_d(n, q)$ је блок дизајн са параметрима

$$v = q^n, \quad k = q^d, \quad r = \left[{n \atop d} \right]_q = \left[{n-1 \atop d-1} \right]_q, \quad b = q^{n-d} \left[{n \atop d} \right]_q$$

Доказ. Вредности за v и k су очигледне. Број d- равни кој садрже x једнак је броју d- димензионалних линеарних потпростора који садрже $0 = x - x$, тј. $\left[{n \atop d} \right]_q$. Слично, број d- равни које садрже две тачке x и y једнак је броју d- димензионалних потпростора који садрже 0 и x – y. То је једнако броју (d-1)- димензионалних потпростора фактор- простора W/U, где је U потпростор генерисан са x – y. Отуда $\lambda = \left[{n-1 \atop d-1} \right]_q$.

Нека је F поље и V (n+1) – димензионални векторски простор над F. Скуп свих потпростора простора V, уређених инклузијом зове се n-димензионални пројективни простор над F. Ако је F поље Галуа (Galois) GF(q) онда се овај простор означава са PG(n, q). Једнодимензионални (дводимензионални, тродимензионални, n- димензионални) потпростори простора V зову се тачке (праве, равни, хиперравни); уопште, (i + 1)-димензионални потпростори зову се i- равни. Тачке простора PG(n, q) заједно са d-равнима као блоковима и инциденцијом природним припадањем формирају структуру инциденције $PG_d(n, q)$.

11. Теорема. $PG_d(n, q)$ је блок дизајн са параметрима

$$v = \left[{n+1 \atop 1} \right]_q = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \qquad k = \left[{d+1 \atop 1} \right]_q = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \qquad r = \left[{n \atop d} \right]_q$$

$\lambda = \left[\begin{matrix} n-1 \\ d-1 \end{matrix}\right]_q$ и $b = \left[\begin{matrix} n+1 \\ d+1 \end{matrix}\right]_q$

Доказ је сличан доказу Теореме 10.

12. Дефиниција. Нека D=(V, B, $\in$) и D′=(V′, B′, $\in$) буду структуре инциденције и нека φ: V $\cup$ B $\to$ V′ $\cup$ B′ буде бијекција. φ се зове изормофизам акко важи:

(i) $V^{\varphi} = V'$ и $B^{\varphi} = B'$;

(ii) $P \in l \Leftrightarrow P^{\varphi} \in l^{\varphi}$ за све $P \in V$ и све $l \in B$.

13. Дефиниција. За структуру инциденције (V, B, $\in$) каже се да је решива ако постоји разбијање скупа блокова $B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ тако да кроз сваку тачку $P \in V$ пролази тачно један блок $b_i \in B_i$ за свако

$i = 1, \ldots, m$. За $B_1, B_2, \ldots, B_m$ каже се да су класе паралелних блокова.

Решива структура инциденције зове се афин дизајн ако је дужина иста и ако се било која два непаралелна блока секу у μ - тачака.

Ако је s број блокова једне класе B_i, r број паралелних класа афиног дизајна D=(V, B, $\in$) тада

$$|V| = v = s^2 \mu,\ k = s\mu,\ |B| = b = sr$$

Дакле, коефицијенти (s, r, μ) потпуно одређују афин дизајн који је уједно и 1- дизајн $S_r(1, s\mu, s^2\mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. BETH. , T., JUNGNICKEL D., LENZ H. (1985) *Desing theory,* Manheim-Wien-Zurich.
2. ČUPONA G., UŠAN J., STOJAKOVIĆ Z. (1980) *Multiquasigroups and some related structures,* Prilozi MANU, Skoplje I/1, 5-12.
3. DIMOVSKI D., MANDAK A. (1992*) Incidence structures with n-metrics*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, Serija Matematika 6, 151-155.
4. HUGHES D. R., PIPER F. C. (1985) *Desgn theory*, London-New York.
5. УШАН J.(1989) *⟨Nn, E⟩ - Сети с (n+1)-расстоянием*, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad, Ser. Math. 17, 22, 65-87.

Alija Mandak, PhD
Faculty of Teacher Training, Leposavić

INCIDENCE STRUCTURE

***Abstract**: It is known that T-designs represent generalisation of common characteristics of finite affine planes and projective planes. General structure of incidence is defined in the paper while some of its combinatory characteristics have been examined.Some of the most important structures of incidence are being defined such as follows: projective planes, n-dimensional affines and projective space and block designs.*

Key words: incidence structure, affine planes, projective planes, block design, isomorphism