Зборник радова Учитељског факултета
у Призрену – Лепосавић, 5, 2011.

Проф. др Алија Мандак[16]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ЈЕДНА КОНСТРУКЦИЈА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ РЕДА ПЕТ

Апстракт: *У раду се доказује да група Фробениуса реда 12 делује на пројективну раван P реда пет као група колинеације. Користећи ово деловање раван P се може конструисати.*

Кључне речи: пројективна раван, група, колинеација, орбита.

1. НЕКЕ ДЕФИНИЦИЈЕ И РЕЗУЛТАТИ

Структура инциденције је тројка D = (V, B, I), где су V и B дисјунктни скупови и $I \subseteq V \times B$. Елементи скупа V зову се *тачке*, елементи скупа B зову се *блокови.* Ако је A тачка скупа V, онда се скуп свих блокова који су инцидентни са тачком A означава са (A). Тако је

$(A) = \{b: b \in B, A \text{ I } b\}.$

Даље, за $A_1, A_2, \ldots, A_n$, скуп свих блокова инцидентних са свим тачкама $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означава се са $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тако је

$(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \{b: b \in B, A_i \text{ I } b$ за свако $i \in N_n\}$,

где је N скуп свих позитивних целих бројева, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Дуално, за b, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$,

$(b) = \{A: A \in V, A \text{ I } b\}$,

$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \{A: A \in V, A \text{ I } b$ за свако $i \in N_n\}$.

Ми ћемо разматрати структуре инциденције у којима су различити блокови инцидентни са различитим скуповима тачака. Сваки блок b идентификује се са скупом тачака (b) а релација инциденције идентификује се са обичном релацијом $\in$.

Дефиниција 1. Структура инциденције P = (V, B, I) зове се *пројективна раван* ако и само ако испуњава следеће аксиоме:

[16] alija.mandak@pr.ac.rs

(P. 1) Било које две различите тачке спојене су са тачно једном правом.

(P. 2) Било које две различите праве секу се тачно у једној тачки.

(P. 3) Постоји *четвороугао,* тј. 4 тачке од којих било које три нису на заједничкој правој.

Следећа теорема је доказана у [1].

Теорема 1. Нека је P= (V, B, I) коначна пројективна раван. Постоји природни број n, зове се *ред* равни P, који испуњава:

a) $|(A)| = |(g)| = n+1$ за све $A \in V$ и $g \in B$;

b) $|V| = |B| = n^2 + n + 1$.

Коначна пројективна раван реда n означава се са S $(2, n+1, n^2+n+1)$.

2. КОНСТРУКЦИЈА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ РЕДА ПЕТ

Теорема 2. Група Фробениуса G реда 12 делује на пројективну раван P реда 5 као група колинеација. Користећи ово деловање раван P се може конструисати.

Доказ. Нека је

$$G = \left\langle \rho, \alpha / \rho^6 = \alpha^2 = 1, \rho^\alpha = \rho^{-1} \right\rangle$$

Група Фробениуса реда 12 која делује на пројективну раван P реда 5 као група колинеација. Раван P има $5^2+5+1 = 31$ тачку и исто толико правих. Из $31 = 6 \cdot 5+1$ и из тврђења да колинеација $\langle \rho \rangle$ делује семирегуларно на нефиксним тачкама, следи да $\langle \rho \rangle$ има 5 орбита тачака дужине 6 и једну орбиту дужине 1. Можемо узети да је

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_5)(2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_5)(3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_5)\cdots(5_0, 5_1, 5_2, \cdots 5_5)$$

где су $1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_5, 2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_5, 3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_5, \cdots 5_0, 5_1, 5_2, \cdots 5_5$ све тачке равни P.

Из теореме о орбитама следи да $\langle \rho \rangle$ има исту структуру орбита правих. Можемо узети да је

$$\rho = (\ell_\infty)(\ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \cdots, \ell_1\rho^5)(\ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \cdots, \ell_2\rho^5)$$
$$(\ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \cdots, \ell_3\rho^5)\cdots(\ell_5, \ell_5\rho, \ell_5\rho^2, \cdots, \ell_5\rho^5)$$

где су

$$\ell_\infty, \ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \cdots, \ell_1\rho^5, \ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \cdots, \ell_2\rho^5, \ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \cdots, \ell_3\rho^5, \cdots$$
$$\ell_5, \ell_5\rho, \ell_5\rho^2, \cdots, \ell_5\rho^5$$

све праве равни P.

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle\rho\rangle$. Можемо узети да је

$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \cdots, 1_5\}.$

Нека је ℓ_1 права која пролази кроз ∞. Очигледно је да ℓ_1 садржи по једну тачку из сваке орбите тачака. Без губитка општости можемо узети да је

$\ell_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \cdots, 5_0\}.$

Осталих осам права орбите права којој припада права ℓ_1 добијају се деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots, \rho^5$ на праву ℓ_1. Праве ℓ_1 и ℓ_∞ пролазе кроз 1_0. Остале четири праве $\ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_5$ које пролазе кроз 1_0 леже у четири преостале различите $\langle\rho\rangle$- орбите правих равни P. Ако се конструишу ове праве, преостале све праве равни P добијају се деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots, \rho^5$ на праве $\ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_5$. Из услова

$\left|\ell_i \cap \ell_1\rho^k\right| = 1$, i = 2, 3, $\cdots$, 5, k = 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 5

следи да је

$\ell_i = \{1_0, 1'_1, 2'_2, 3'_3, \cdots, 5'_5\}$

где су 1',2',3',4',5' (необавезно различити) бројеви скупа {2, 3,$\cdots$, 5}.

Сада испитујемо деловање колинеације α на скуп тачака и скуп правих равни P. Како је ред инволуције α паран, следи да је инволуција α елација. Из $\rho^\alpha = \rho^{-1}$ следи да је 1_0 центар и права ℓ_1 оса инволуције α. Отуда, инволуција α фиксира 6 правих $\ell_\infty, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_5$ и 6 тачака ∞, $1_0, 2_0, 3_0, \cdots, 5_0$. Из 31 = 2 · 13 + 5 следи да α има 5 орбита тачака дужине 1 (5 фиксних тачака) и 13 орбите тачака дужине 2. Ако орбитарну структуру колинеације α запишемо у скраћеном облику (записујући само индексе 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 5), можемо узети да је

α = (0)(1)(2, 5)(3, 4)

где (2, 5) означава даје 2α = 5 из исте орбите тачака, (3, 4) означава да је 3α = 4 из исте орбите тачака. Из тврђења

$$\ell_i \alpha = \ell_i,\ \mathrm{i} = 2, 3, \cdots, 5$$

следи да су праве ℓ_i, i = 2, 3, ⋯ , 5 типа

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_5, b_3, b_4\}$$

где су i, a, b према паровима различити бројеви скупа {2, 3, ⋯ , 5}. Можемо узети да је

$$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 3_2, 3_5, 4_3, 4_4\}.$$

Сада се конструишу праве ℓ_i, i = 3, 4, ⋯ , 5 које су типа

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_5, b_3, b_4\}.$$

Из тврђења

$$\left|\ell_i \cap \ell_2 \rho^k\right| = 1,\ \mathrm{i} = 3, 4, \cdots, 5,\ \mathrm{k} = 0, 1, 2, \cdots, 5$$

следи да је само један из бројева a, b из скупа {2, 3} а други из скупа {4, 5}.

Из тврђења

$$\left|\ell_i \rho^s \cap \ell_j \rho^k\right| = 1,\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j},\ \mathrm{i, j} = 3, 4, 5,\ \mathrm{k, s} = 0, 1, 2, \cdots, 5$$

Следи да праве ℓ_i и ℓ_j, i ≠ j, имају тачно један заједнички пар бројева a, b. Користећи ово тврђење за праве ℓ_i, i = 3, 4, 5, добија се следеће јединствено решење за ове праве:

$$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 4_2, 4_5, 5_3, 5_4\}$$
$$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 2_3, 2_4, 5_2, 5_5\}$$
$$\ell_5 = \{1_0, 5_1, 2_2, 2_5, 3_3, 3_4,\}$$

Теорема је доказана.

3. ЗАКЉУЧАК

Овај рад презентује резултат добијен деловањем групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P за коју унапред знамо да постоји. Слично се може испитивати деловање групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P чије је питање егзистенције отворено.

ЛИТЕРАТУРА

Beth, T., Jugnickel, D., Lenz, H. (1985), *Design theory,* Manheim, Wien, Zurich.

Dimovski, D., Mandak, A. (1992), Incidence structures with n-metrics, *Zbornik radova 6*, Filozofski fakultet, Niš, 151–155.

Dimovski, D., Mandak, A. (1999), Weighted block designs and Steiner systems, *J. Math.*, Novi Sad, Vol. 29, No. 2, 163–169.

Lenz, H. 1965), *Vorlesungen uber projective geometrie,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Mandak, A. (1994), On weighted block designs, *Proc. Math. Conf.*, Priština, 21–25.

Mandak, A. (2007), Multiquasigroups and weighted projective planes, *J. Math.*, Kragujevac, 30, 211–219.

Ušan, J. (1989), <Nn, E>-seti s (n + 1)-rastojaniem, *Rew. Res. Fac. Sci*. Univ. Novi Sad, Ser. Math, 17 (2), 65–87.

Čupona, Ġ., Stojaković, Z., Ušan, J. (1981), On finite multiquasigroups, *Publ. Inst. Math*., Beograd, 20 (43), 53–59.

Čupona, Ġ., Stojaković, Z., Ušan, J. (1980), Multiquasigroups and some related structures, *Prilozi MANU* I/1, Skopje.

Mandak Alija, PhD, Full Professor
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavic

A CONSTRUCTION OF PROJECTIVE PLANE OF ORDER FIVE

Summary: *The paper proves that the group of Frobenius order 12 acts on projective plane P order 5 as collineation group.Using this activity plane R can be constructed.*

Key words: Projective plane, group, collineation, orbit