Зборник радова Учитељског факултета
у Призрену – Лепосавић, 4, 2010.

Проф. др Алија Мандак[14]
Учитељски факултет у Призрену – Лепосавић

ИЗОМОРФНО ПОТАПАЊЕ ИНТЕГРАЛНОГ ДОМЕНА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА У ПОЉЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Апстракт: *У раду се дефинише интегрални домен целих бројева, поље рационалних бројева, изоморфизам и изоморфно потапање прстена. Доказује се да се интегрални домен целих бројева може изоморфно потапити у поље рационалних бројева тако да се са апстрактне тачке гледишта сваки цео број идентификује са разломком чији је именилац један и да се интегрални домен целих бројева може сматрати као поддомен поља рационалних бројева.*

Кључне речи: број, скуп, пресликавање, инјекција, хомоморфизам, изоморфно потапање, интегрални домен, поље.

1. Изоморфно потапање

Пре него што дајемо појам појам изоморфног потапања групе и прстена посматрајмо један пример.

1.1. Пример. Нека су $G = \{a, b, c, d\}$и $G_1 = \{x, y, z, t\}$ два групоида чије су операције дефинисане следећим Келијевим шемама:

	a	b	c	d
a	a	c	b	a
b	b	d	c	a
c	a	b	c	c
d	b	a	d	a

	x	y	z	t
x	x	z	y	x
y	y	z	y	x
z	x	y	z	z
t	y	x	t	x

Ако у првој шеми извршимо замену $f\colon a \to x,\ b\to y,\ c \to z,\ d \to t$ онда добијамо другу шему. Због тога кажемо да су посматрани групоиди истолики илин да су изоморфни а горе наведено пресликавање зове се изоморфизам. Са апстрактне тачке гледишта два изоморфна групоида се не

[14] alija.mandak@pr.ac.rs

разликују, тј. могу се идентификовати. У вези са овим разматрањем дајемо општу дефиницију изоморфности за групе и изоморфности за прстене.

1.2. Дефиниција. Пресликавање $f\colon G \to G_1$ назива се изоморфизам група ако је бијекција и ако за сваки $x, y \in G$ важи:

$$f(x\,y) = f(y)\ f(y).$$

Две групе G и G_1 су изоморфне ако постоји бар један изоморфизам између њих.

1.3. Дефиниција. За групу G каже се да се може изоморфно потопити у групу G_1 ако постоји обратно једнозначно пресликавање $f\colon x \to x$ групе G у G_1 са особином:

$$F(x\,y) = f(x)\,f(y) = x_1\,y_1.$$

Пресликавање f зове се **изоморфно потапање.**

Ако је $f\colon G \to G_1$ изоморфно потапање онда се група G идентификује са својом сликом $f(G)$ која је подгрупа групе G_1 и са апстрактне тачке гледишта групу G можемо посматрати као подгрупу групе G_1.Дакле група G се може потопити у групу G_1 ако и само ако је G изоморфна некој подгрупи од G_1.

1.4. Дефиниција. Пресликавање $f\colon R \to R_1$ назива се изоморфизам прстена ако је бијекција и ако за сваки $x, y \in R$ важи:

$$f(x\,y) = f(y)\ f(y),\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Два прстена R и R_1 су изоморфна ако постоји бар један изоморфизам између њих.

1.5. Дефиниција. За прстен R каже се да се може изоморфно потопити у прстен R_1 ако постоји обратно једнозначно пресликавање $f\colon x \to x$ прстена R у R_1 са особинома:

$$f(x\,y) = f(x)\,f(y) = x_1\,y_1 \quad f(x + y) = f(x) + f(y) = x_1 + y_1.$$

Пресликавање f зове се **изоморфно потапање.**

Ако је $f\colon R \to R_1$ изоморфно потапање онда се прстен R идентификује са својом сликом $f(R)$ који је подпрстен прстена R_1 и са апстрактне тачке гледишта прстен R можемо посматрати као подпрстен прстена R_1. Дакле, прстен R се може потопити у прстен R_1 ако и само ако је R изоморфан неком подпрстену од R_1.

2. Интегрални домен целих бројева

Адитивни групоид $(\boldsymbol{N},+)$ скупа природних бројева је комутативна полугрупа али без неутралног елемента. Да би та полугрупа била са неутралним елементом скуп $\boldsymbol{N}$ се проширује тако што му додајемо нулу $(\boldsymbol{0})$ која има следећу особину:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},(\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{N}).$$

Дакле, 0 је неутрални елемент за сабирање у скупу $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}\cup\{\boldsymbol{0}\}.$ Структура $(\boldsymbol{N}_0,+)$ је комутативна полугрупа са неутралним елементом 0 . У овој полугрупи нема сваки број супротни. Да бисмо ово постигли сваком природном броју $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$ придружујемо њему супротан $-\boldsymbol{n}$ са особином

$$\boldsymbol{n}+(-\boldsymbol{n})=(-\boldsymbol{n})+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}.$$

Тако се добија скуп $\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева који садржи све природне бројеве (позитивне целе), нулу и све негативне целе бројеве.

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{N}\cup\{\boldsymbol{0}\}\cup(-\boldsymbol{N}),\ \boldsymbol{N}=\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{3},\cdots,\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1},\cdots\},$$
$$-\boldsymbol{N}=\{-\boldsymbol{n}\mid \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}\}=\{-\boldsymbol{1},-\boldsymbol{2},-\boldsymbol{3},\cdots,-\boldsymbol{n},-(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}),\cdots\}.$$

У скупу $\boldsymbol{Z}$ се дефинишу операције сабирање и множење целих бројева тако да су оне сагласне са истим операцијама дефинисаним у скупу $\boldsymbol{N}$ свих природних бројева. Ово значи да ако цели бројеви $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$ онда збир $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}$ и производ $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}$ се дефинишу исто као у скупу $\boldsymbol{N}$.

2.1. Теорема. Структура $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ тј. скуп $\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева са операцијама сабирање (+) и множење (·) је асоцијативни и комутативни прстен са јединицом без делитеља нуле (тј. интегрални домен).

2.2. Дефиниција. Структура $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ зове се **интегрални домен целих бројева**.

3. Поље рационалних бројева

Дајемо дефиницију количника два цела броја и објашњење да за било која два цела броја њихов количник не мора постојати.

3.1. Дефиниција. Количник два цела броја $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{Z}$ (ако постоји) је цео број $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{Z}$ такав да је

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}.$$

Објаснимо да, на пример, количник бројева 5 и 3 не постији. Прво, количник не може бити негативан јер је производ негативног броја и броја 3 негативан па не може бити 5. Даље, количник не може бити 0, 1, 2, и 3 што се проверава непосредним множењем ових бројева са 3. На крају, количник c не може бити већи од 3 јер ако је $c > 3$, онда $c \cdot 3 > 3 \cdot 3$, тј. $c \cdot 3 > 9$, тј. не може бити 5.

Исто тако, количник целог броја $a \neq 0$ и броја 0 не постоји. Заиста, ако количник c постоји онда је $c \cdot 0 = a$ што није могуће јер је по дефиницији множења у скупу Z $c \cdot 0 = 0$ за сваки $c \in Z$. Због ове особине каже се да дељење нулом није могуће.

По дефиницији множења у скупу Z је $c \cdot 0 = 0$ за сваки $c \in Z$. Ово значи да је количник $0:0$ било који цео број $c \in Z$ тј. није једнозначно одређен. Због ове особине каже се да дељење 0 са 0 није једнозначно одређено.

Ако количник два цела броја $a, b \in Z$ постоји онда се каже да је **број a дељив бројем b** или **b је фактор у а.**

Да би операција дељење са бројевима различитим од 0 била потпуно дефинисана скуп Z проширујемо тако што му додајемо све разломке $\frac{p}{q}$ где су $p, q \neq 0$ узајамно прости цели бројеви.

3.2. Дефиниција. Рационални бројеви су парови узајамно простих целих бројева p, q, где је $p \neq 0$, записаних у виду $\frac{p}{q}$ (црта замењује знак операције дељење).

Ако су рационални бројеви дати као парови узајамно простих целих бројева онда једнакост рационалних бројева се дефинише овако:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \quad pq = rs\,.$$

У случају $q = 1$ однос $\frac{p}{1}$ дефинише цео број p представљен количником дељења броја q са 1. Дакле цели бројеви су специјални случајеви рационалних бројева. Ако је $q \neq 1$ и p, q узајамно прости онда у скупу Z свих целих бројева p није дељиво са q, и однос $\frac{p}{q}$ раније није био дефинисан. Отуда овакви рационални бројеви нису цели.

Скуп свих рационалних бројева означава се са Q. Из претходног разматрања следи да је

$$N \subset Z \subset Q.$$

У скупу Q се дефинишу операције сабирање и множење рационалних бројева тако да су оне сагласне са истим операцијама дефинисаним у скупу

$\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева. Ово значи да ако цели бројеви $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Z}$ онда збир $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и производ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$ се дефинишу исто као у скупу $\boldsymbol{Z}$.

3.3. Теорема. Структура $(\boldsymbol{Q},+,\cdot)$ тј. скуп $\boldsymbol{Q}$ свих рационалних бројева са операцијама сабирање (+) и множење ($\cdot$) је поље.

3.4. Дефиниција. Структура $(\boldsymbol{Q},+,\cdot)$ зове се **поље рационалних бројева.**

4. Изоморфно потапање целих у рационалне бројеве

Још у основној школи ученицима је познато да се сваки цео број $\boldsymbol{a}$ може посматрати као разломак $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}}$ чији је именилац једнак 1 и скуп целих бројева $\boldsymbol{Z}$ је подскуп скупа рационалних бројева $\boldsymbol{Q}$, тј. $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Оправдање за ово даје следећа теорема.

4.1. Теорема. Интегрални домен целих бројева $\boldsymbol{Z}$ може се изоморфно потопити у поље рационалних бројева $\boldsymbol{Q}$.

Доказ. Посматрамо пресликавање f: Z $\to$ $\boldsymbol{Q}$ дефинисано на следећи начин: За произвољно $\boldsymbol{a} \in$ Z

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}}\cdot$$

Проверимо да је пресликавање f изоморфизам. Јасно је да је f сурјекција. Проверимо да је инјекција. Нека је $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$. Имамо $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}} \neq \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}}$, тј. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$. Остаје да се провери да је f хомоморфизам. За произвољне $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in$ Z имамо

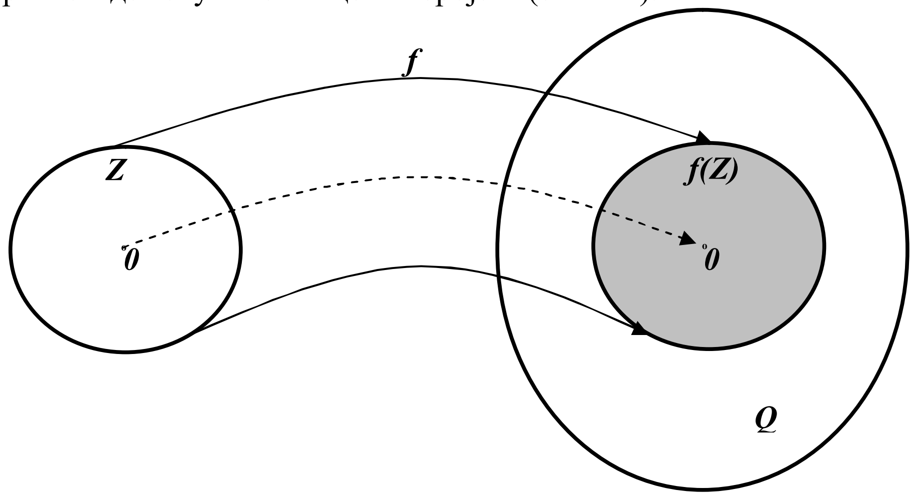
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}).$$

Дакле, f је хомомоморфизам, инјекција и сурјекција, тј. f је изоморфизам.

Слика интегралног домена $\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева

$$Im(f) = f(Z) = \left\{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}} : \boldsymbol{a} \in Z\right\}$$

је подинтегрални домен поља рационалних бројева $\boldsymbol{Q}$ која садржи све рационалне бројеве (разломке) чији је именилац једнак 1 и која је изоморфна интегралном домену $\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева (слика 1).



(Слика 1.)

Са апстрактне тачке гледишта сваки цео број $\boldsymbol{a}$ идентификује се са разломком $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1}}$ и интегрални домен $\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева идентификује се са подинтегралним доменом поља $\boldsymbol{Q}$ свих рационалних бројева који садржи све рационалне бројеве (разломке) чији је именилац једнак 1. Сваки рационалан број $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$ је облика $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}.$

Закључак

Уместо интегралног домена $\boldsymbol{Z}$ свих целих бројева може се посматрати произвољан интегрални домен $\boldsymbol{R}$. Доказује се да свако поље $\boldsymbol{K}$ које садржи $\boldsymbol{R}$ садржи и најмање потпоље које садржи $\boldsymbol{R}$. То потпоље је изоморфно пољу разломака интегралног домена $\boldsymbol{R}$.

Литература

Белоусов, В. Д. (1971): *Алгебраические сети и квазигрупры* , Кишинёв.

Чупона, Г. Трпеновски, Б. (1973): *Предавања по алгебра II,* Универзитет во Скопје, Скопје.

Ляпин, Е. С. Евсеев, А. Б. (1974): *Алгебра и теория чисел,* Просвешение, Москва.

Kočinac, Lj. Mandak, A. (1996): *Algebra II,* Univerzitet u Prištini, Priština.

Kurepa, S. (1971): *Uvod u matematiku,* Tehnička knjiga, Zagreb.

Kurepa, Đ. (1971): *Viša algebra II,* Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

Perić, V. (1980): *Algebra II,* Sarajevo.

Mandak, A. (2005): *Osnovi nastave matematike sa zbirkom zadataka,* Učiteljski fakultet u Prizrenu-Leposaviću, Leposavić.

Mijajlović, Ž. (1993): *Algebra 1,* MILGOR, Beograd, Moskva.

Stojaković, Z., Herceg, D. (2005): *Linearna algebra i analitička geometrija,* Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad.

Alija Mandak, Ph.D.
Teacher Training Faculty in Prizren – Leposavić

A ISOMORPH EMBODIED OF THE INTEGRAL DOMAIN OF INTEGERS INTO THE RATIONAL NUMBERS FIELD

Summary: *In paper the integral domain of integers, the field of rational numbers, the isomorph and isomorph embodied are defined. It is proved that the integral domain of integers is isomorph embodied into the field of rational numbers thus from an abstract point of view each integer is identified with fraction whose demonitor is one.*

Key words: number, set, injection, homeomorphism, isomorphism, integral domain, field.